

Le théorème ergodique de Birkhoff, ou comment les probabilités surgissent du chaos

Élise Janvresse

(LAMFA, CNRS - Université de Picardie Jules Verne)



Merci à Martin Leguil et Thierry de la Rue qui m'ont prêté des images pour cet exposé.





George David Birkhoff



John von Neumann

Système dynamique

système dont l'évolution dans le temps est décrite
par une loi

Système dynamique

système dont l'évolution dans le temps est décrite par une loi

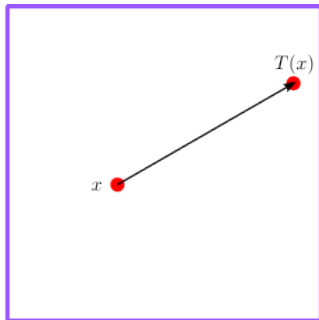
- espace des phases X (états possibles du système)

Système dynamique

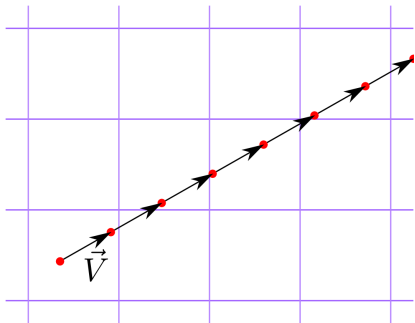
système dont l'évolution dans le temps est décrite par une loi

- ▶ espace des phases X (états possibles du système)
- ▶ transformation $T : X \longrightarrow X$
si x représente l'état du système à un instant donné, $T(x)$ est l'état du système à l'instant suivant.

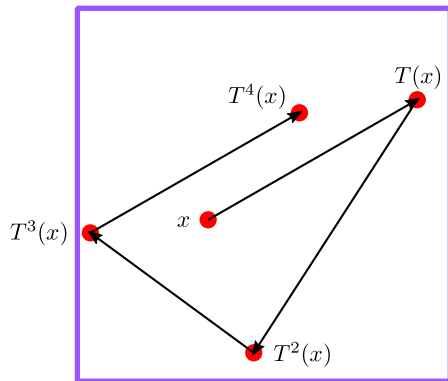
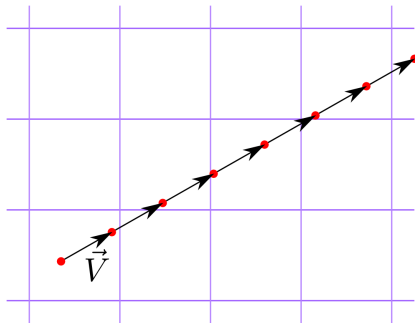
Translation sur le tore



Translation sur le tore

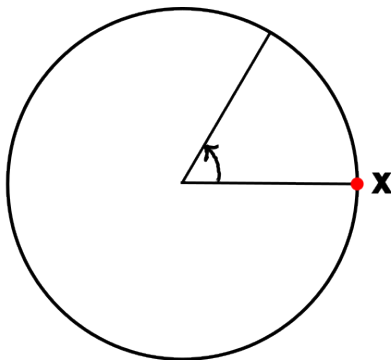


Translation sur le tore



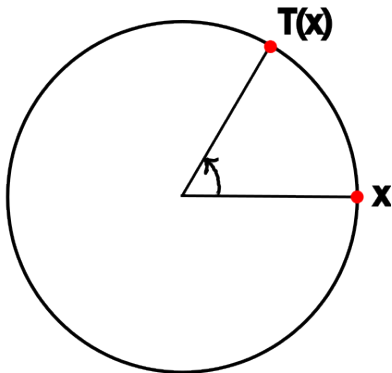
Rotation d'angle $2\pi\alpha$

X cercle unité du plan complexe



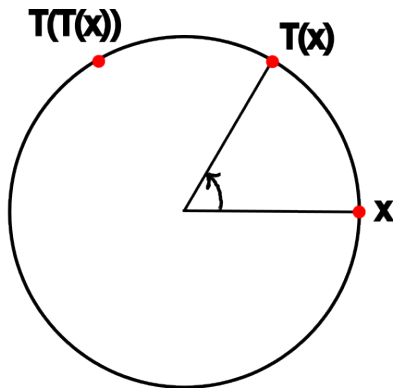
Rotation d'angle $2\pi\alpha$

X cercle unité du plan complexe



Rotation d'angle $2\pi\alpha$

X cercle unité du plan complexe



Théorie ergodique

cas où la probabilité que le système soit dans un état donné est *invariante* au cours du temps.

Théorie ergodique

cas où la probabilité que le système soit dans un état donné est *invariante* au cours du temps.

Pour tout A , $\mathbb{P}(x \in A) = \mathbb{P}(T(x) \in A)$

Théorie ergodique

cas où la probabilité que le système soit dans un état donné est *invariante* au cours du temps.

Pour tout A , $\mathbb{P}(x \in A) = \mathbb{P}(T(x) \in A)$

- pour la rotation : la mesure d'un arc de cercle est proportionnelle à sa longueur
- pour la translation sur le tore : conservation de l'aire

Théorie ergodique

cas où la probabilité que le système soit dans un état donné est *invariante* au cours du temps.

Pour tout A , $\mathbb{P}(x \in A) = \mathbb{P}(T(x) \in A)$

- pour la rotation : la mesure d'un arc de cercle est proportionnelle à sa longueur
 - pour la translation sur le tore : conservation de l'aire
- mesure de Lebesgue

Suites produites par un système dynamique

Orbite du point $x \in X$:

$$x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots$$

$T^2(x)$ désigne l'itération $T(T(x))$

Suites produites par un système dynamique

Orbite du point $x \in X$:

$$x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots$$

On représente une observation faite sur l'état du système par une fonction f :

$$f(x), f(T(x)), f(T^2(x)), f(T^3(x)), \dots$$

$T^2(x)$ désigne l'itération $T(T(x))$

Suites produites par un système dynamique

Orbite du point $x \in X$:

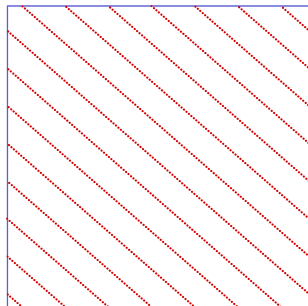
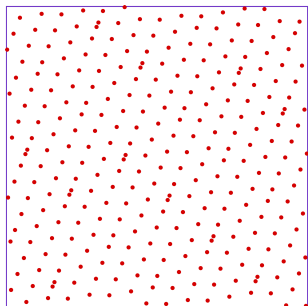
$$x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots$$

On représente une observation faite sur l'état du système par une fonction f :

$$f(x), f(T(x)), f(T^2(x)), f(T^3(x)), \dots$$

→ classification des systèmes dynamiques selon les propriétés des suites qu'ils engendrent.

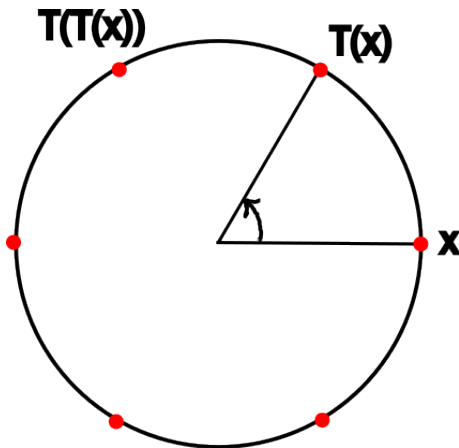
Translation



premiers points d'une orbite pour 2 translations
différentes

Rotation d'angle $2\pi\alpha$

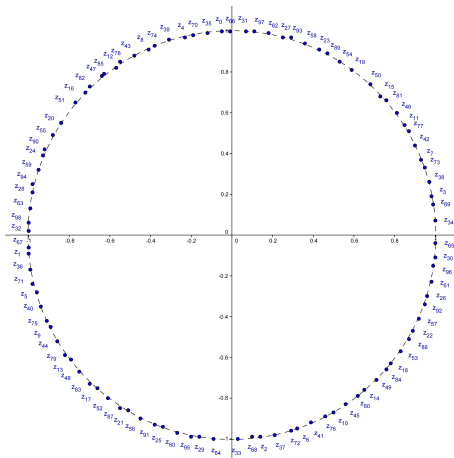
Cas où $\alpha \in \mathbb{Q}$



L'orbite est périodique.

Rotation d'angle $2\pi\alpha$

Cas où $\alpha \notin \mathbb{Q}$



Itérés d'un point sous l'action d'une rotation
irrationnelle

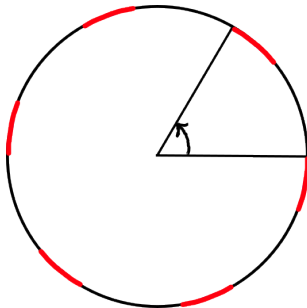
Ergodicité

Le système est dit *ergodique* quand pour tout A invariant ($T^{-1}A = A$), on a

$$\mathbb{P}(x \in A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(x \in A) = 1.$$

Rotation d'angle $2\pi\alpha$

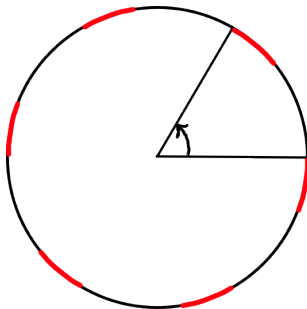
Cas où $\alpha \in \mathbb{Q}$



rotation d'angle $\pi/6$

Rotation d'angle $2\pi\alpha$

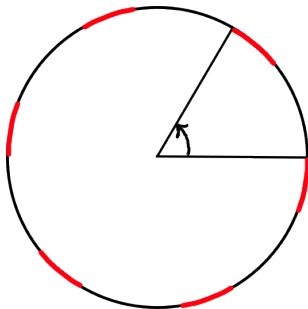
Cas où $\alpha \in \mathbb{Q}$: il existe un ensemble invariant de probabilité dans $]0, 1[$.



rotation d'angle $\pi/6$

Rotation d'angle $2\pi\alpha$

Cas où $\alpha \in \mathbb{Q}$: il existe un ensemble invariant de probabilité dans $]0, 1[$.



rotation d'angle $\pi/6$

Cas où $\alpha \notin \mathbb{Q}$: la rotation est ergodique.
(utiliser les séries de Fourier)

Théorème de Birkhoff (1932)

Dans le cas ergodique, pour presque tout $x \in X$, la *moyenne temporelle* de la suite des observations coïncide avec la *moyenne spatiale* de la fonction sur l'ensemble des états.

pour presque tout x : en dehors d'un ensemble de probabilité nulle.

Théorème de Birkhoff (1932)

Dans le cas ergodique, pour presque tout $x \in X$, la *moyenne temporelle* de la suite des observations coïncide avec la *moyenne spatiale* de la fonction sur l'ensemble des états.

$$\text{p.p.t. } x \in X, \quad \frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{N-1}(x))}{N}$$
$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_X f(y) d\mathbb{P}(y)$$

pour presque tout x : en dehors d'un ensemble de probabilité nulle.

Application

Avec $f = 1_A$

$$\frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{N-1}(x))}{N}$$

est la fréquence des visites de A par l'orbite de x entre les instants 0 et $N - 1$.

Application

Avec $f = 1_A$

$$\frac{f(x) + f(T(x)) + \cdots + f(T^{N-1}(x))}{N}$$

est la fréquence des visites de A par l'orbite de x entre les instants 0 et $N - 1$.

Dans le cas ergodique, pour presque tout $x \in X$, cette fréquence tend vers $\mathbb{P}(x \in A)$.

Nombres normaux en base 2

Développement binaire de $x \in [0, 1[$:

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n}, \quad \text{où } a_n \in \{0, 1\}, \forall n$$

Nombres normaux en base 2

Développement binaire de $x \in [0, 1[$:

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n}, \quad \text{où } a_n \in \{0, 1\}, \forall n$$

x est (simplement) *normal en base 2* quand la fréquence des 0 (et des 1) dans son développement binaire existe et vaut $1/2$.

Nombres normaux en base 2

Développement binaire de $x \in [0, 1[$:

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n}, \quad \text{où } a_n \in \{0, 1\}, \forall n$$

x est (simplement) *normal en base 2* quand la fréquence des 0 (et des 1) dans son développement binaire existe et vaut $1/2$.

Presque tout x est normal en base 2.

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \bmod 1$.

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \mod 1$.

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n}$$

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \bmod 1$.

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n} \implies T^k(x) = \sum_{n \geq 1} a_{k+n} \frac{1}{2^n}$$

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \bmod 1$.

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n} \implies T^k(x) = \sum_{n \geq 1} a_{k+n} \frac{1}{2^n}$$

T “décale” les chiffres du développement binaire.

$$a_{k+1} = 0 \text{ ssi } T^k(x) < 1/2$$

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \bmod 1$.

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n} \implies T^k(x) = \sum_{n \geq 1} a_{k+n} \frac{1}{2^n}$$

T “décale” les chiffres du développement binaire.

$$a_{k+1} = 0 \text{ ssi } T^k(x) < 1/2$$

- la mesure de Lebesgue est invariante par T
- T est ergodique

Idée de preuve

Considérons $X = [0, 1[$ et $T(x) = 2x \bmod 1$.

$$x = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{2^n} \implies T^k(x) = \sum_{n \geq 1} a_{k+n} \frac{1}{2^n}$$

T “décale” les chiffres du développement binaire.

$$a_{k+1} = 0 \text{ ssi } T^k(x) < 1/2$$

- la mesure de Lebesgue est invariante par T
- T est ergodique

Appliquer le théorème de Birkhoff avec $f = 1_{[0,1/2[}$.

Mélange

Le système est dit *mélangeant* quand pour tout A, B , on a

$$\mathbb{P}(x \in T^{-n}A \cap B) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(x \in A)\mathbb{P}(x \in B).$$

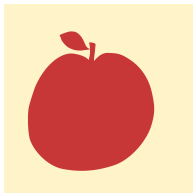
Mélange

Le système est dit *mélangeant* quand pour tout A, B , on a

$$\mathbb{P}(x \in T^{-n}A \cap B) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(x \in A)\mathbb{P}(x \in B).$$

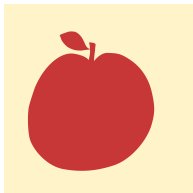
mélangeant $\implies$ ergodique

Transformation du boulanger



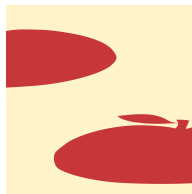
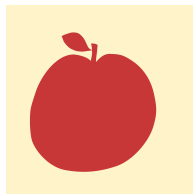
$$T(x, y) =$$

Transformation du boulanger



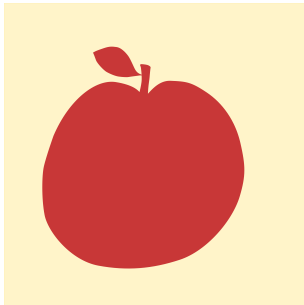
$$T(x, y) =$$

Transformation du boulanger

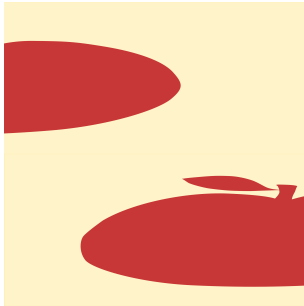


$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{pour } 0 \leq x < 1/2 \\ (2x - 1, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

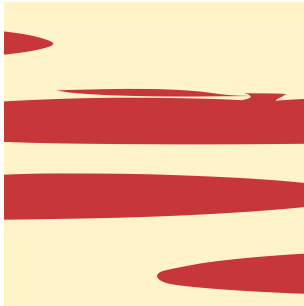
Mélange



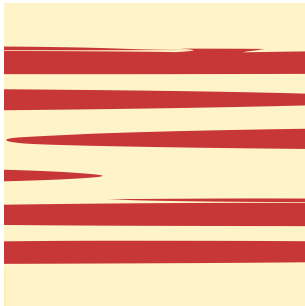
Mélange



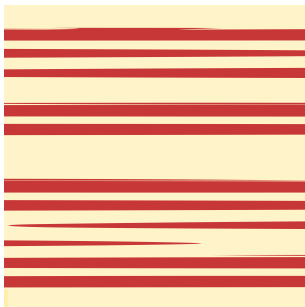
Mélange



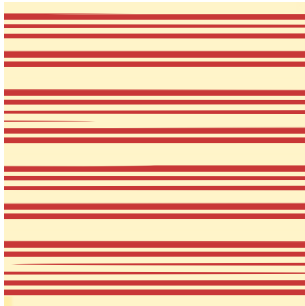
Mélange



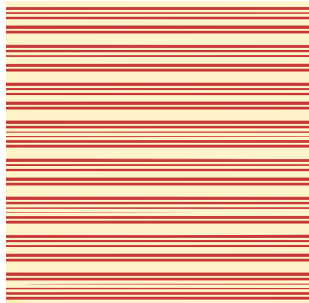
Mélange



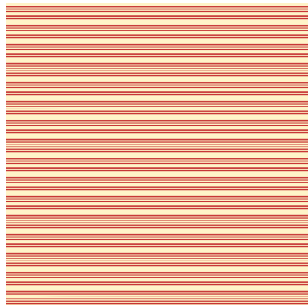
Mélange



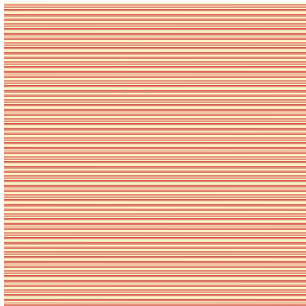
Mélange



Mélange



Mélange



Mélange

