



La dynamique des billards

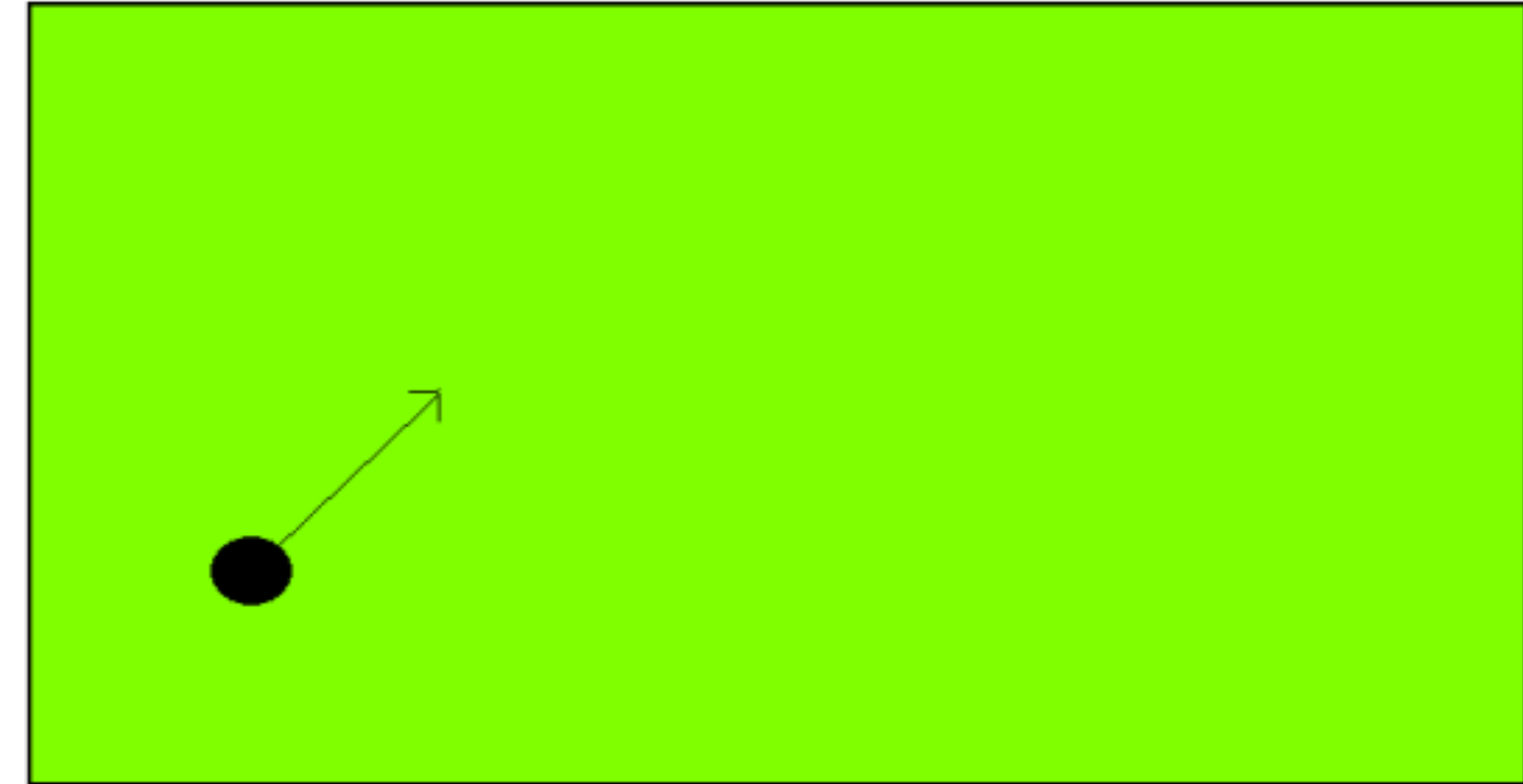
Entre intégrabilité et chaos

Anna Florio (Université Paris Dauphine - PSL)

Dessins de Alfonso Sorrentino

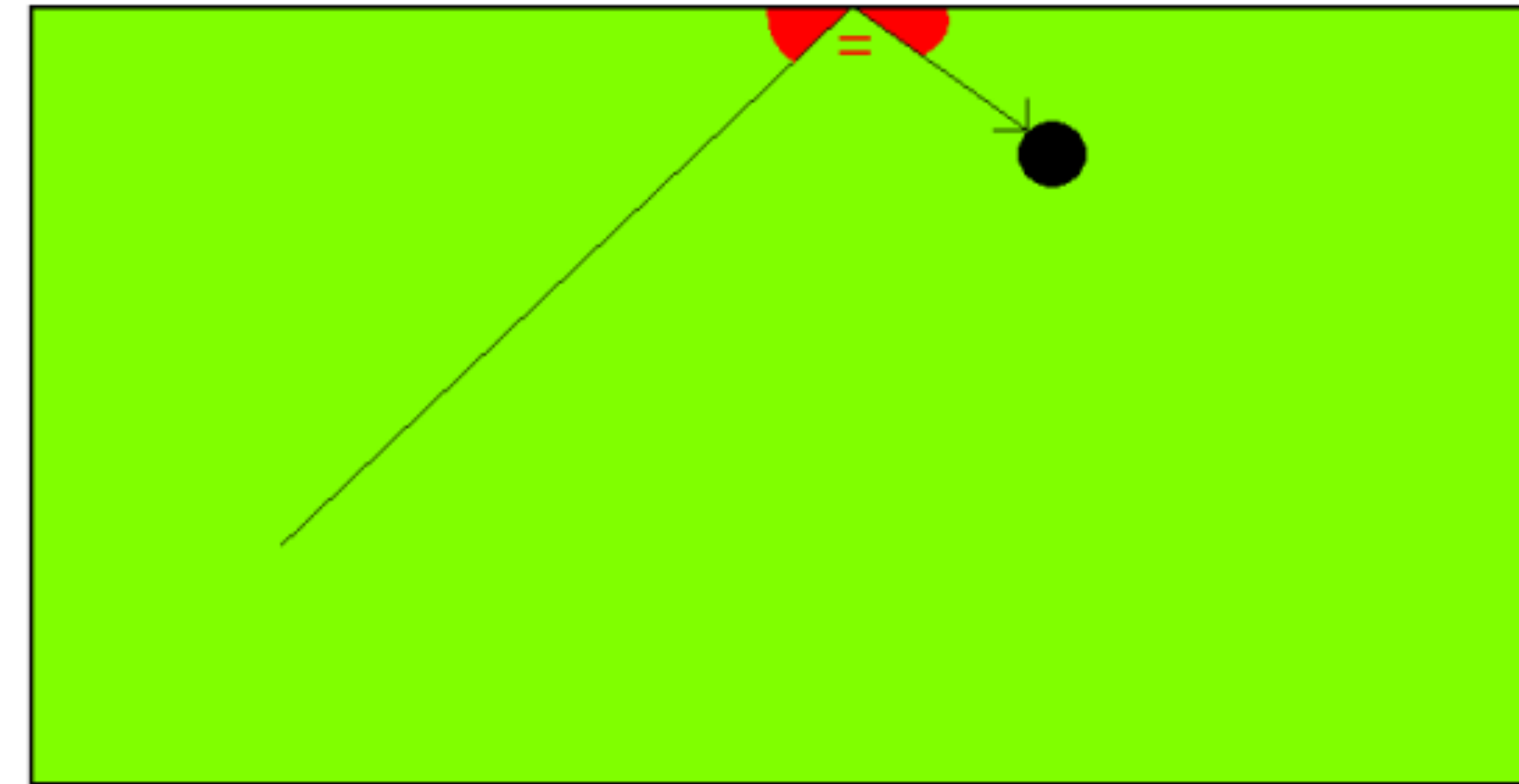
Qu'est-ce qu'un billard mathématique ?

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ région fermée du plan
- boule à l'intérieur qui bouge le long d'une droite à vitesse constante



Qu'est-ce qu'un billard mathématique ?

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ région fermée du plan
- boule à l'intérieur qui bouge le long d'une droite à vitesse constante



- quand la boule arrive au bord, elle rebondit selon la loi :

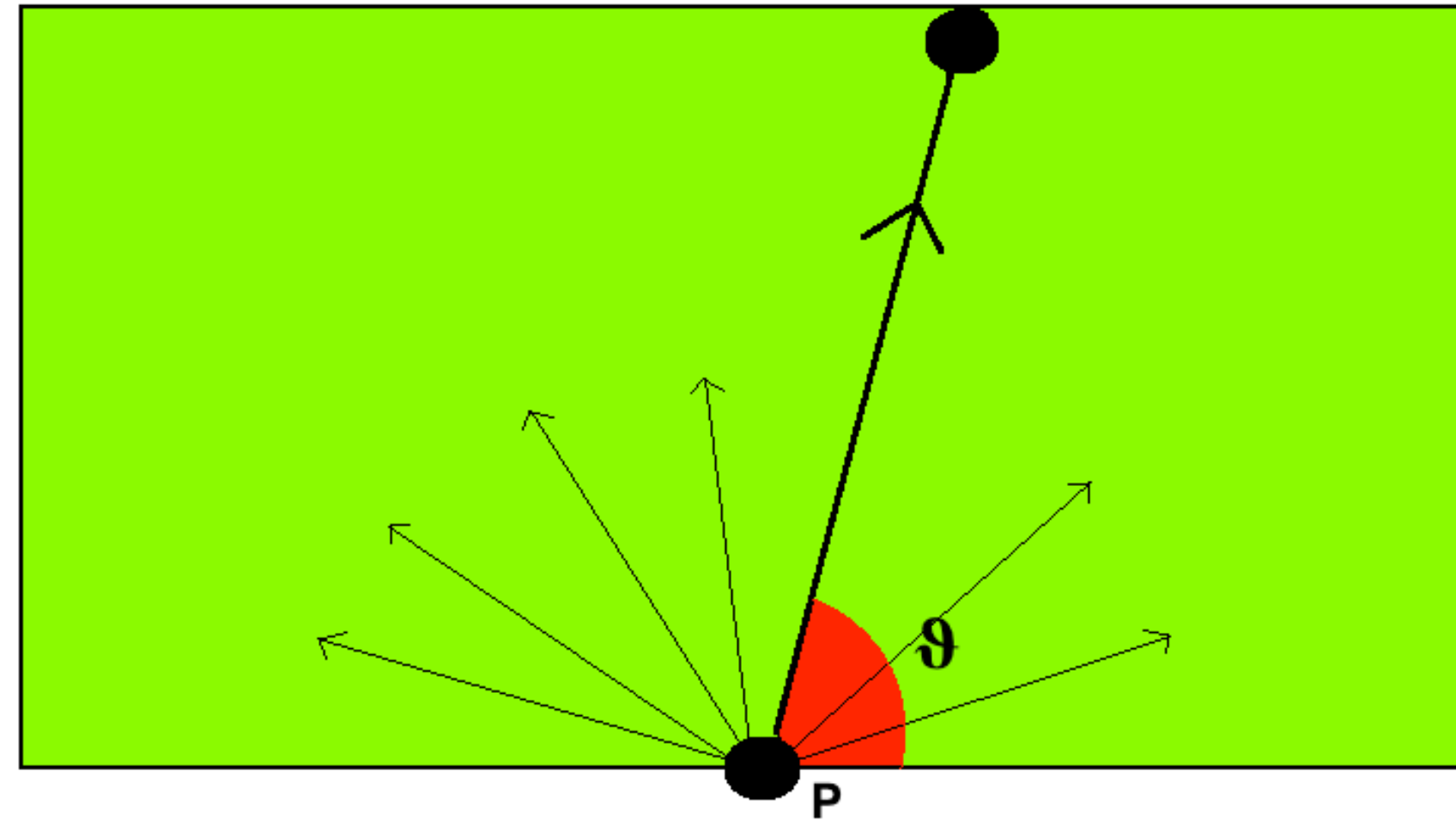
angle d'incidence = angle de réflexion

Peut-on prévoir le comportement de la boule ?

Il suffit de connaître les rebonds successifs sur le bord de la table

Application billard

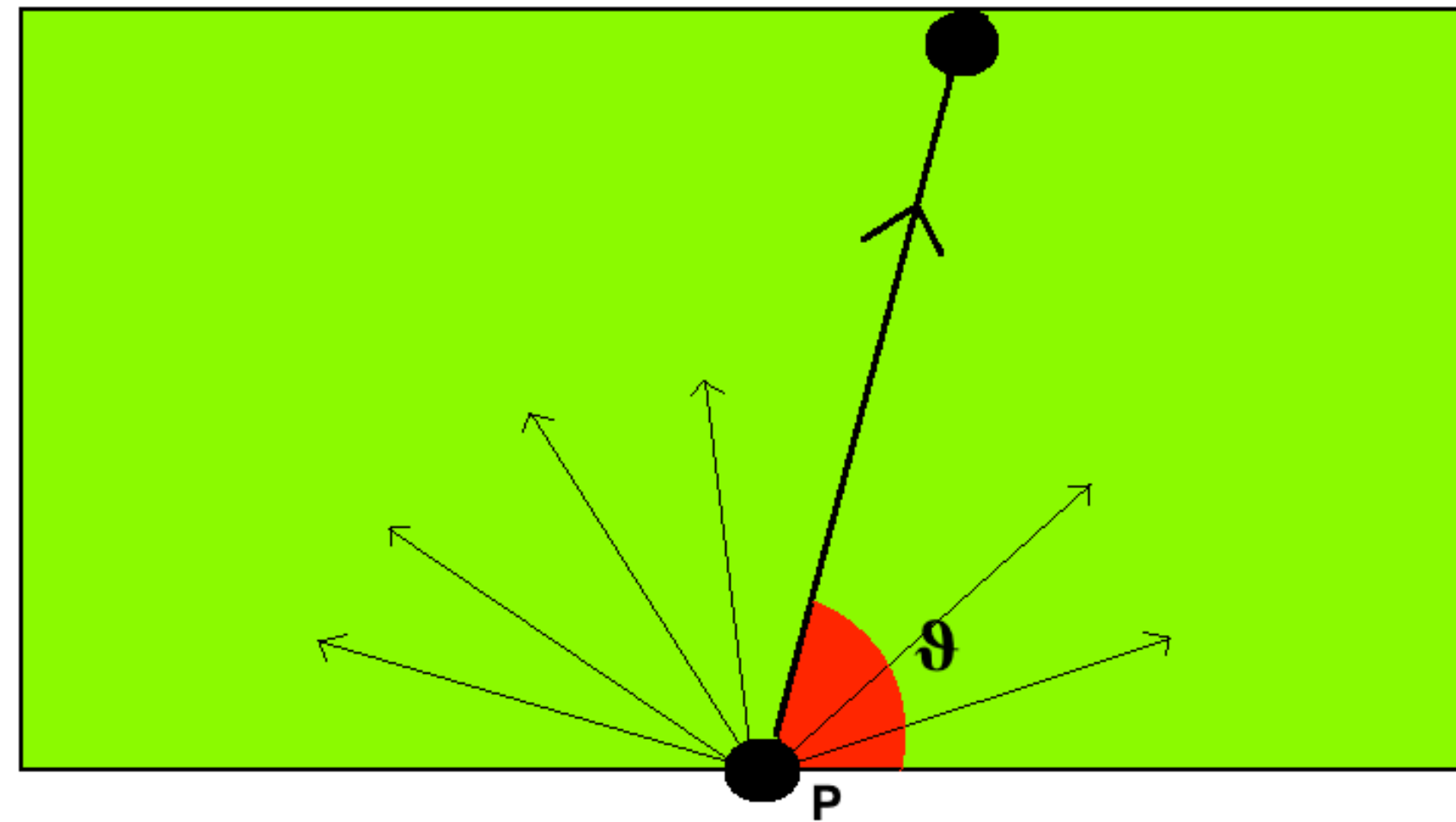
$$f: \partial\Omega \times (0, \pi) \rightarrow \partial\Omega \times (0, \pi)$$



Il suffit de connaître les rebonds successifs sur le bord de la table

Application billard

$$f: \partial\Omega \times (0, \pi) \rightarrow \partial\Omega \times (0, \pi)$$



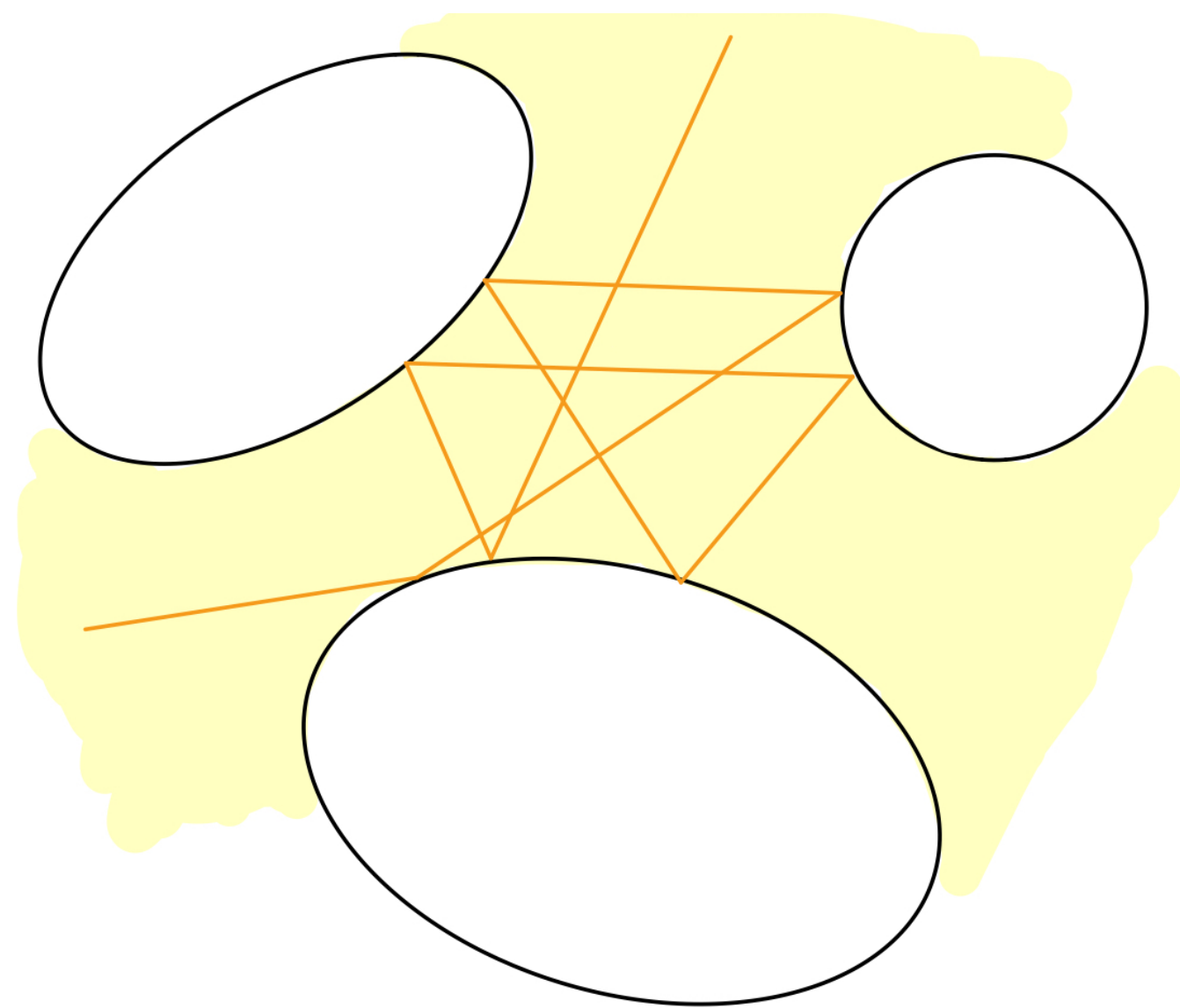
Existe-t-il des orbites périodiques ?

Existe-t-il une orbite dense ?

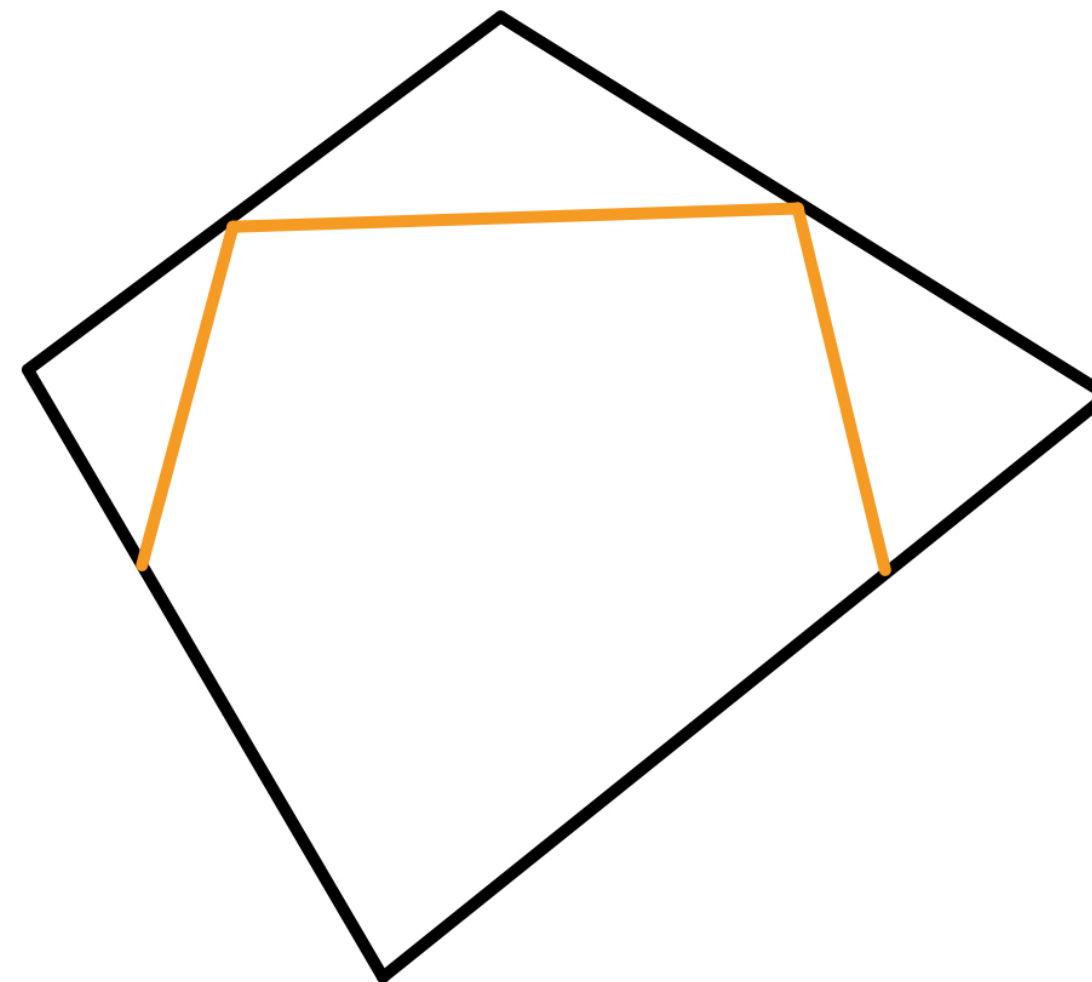
A-t-on une sensibilité aux conditions initiales ?

Dans quel billard voulez-vous jouer ?

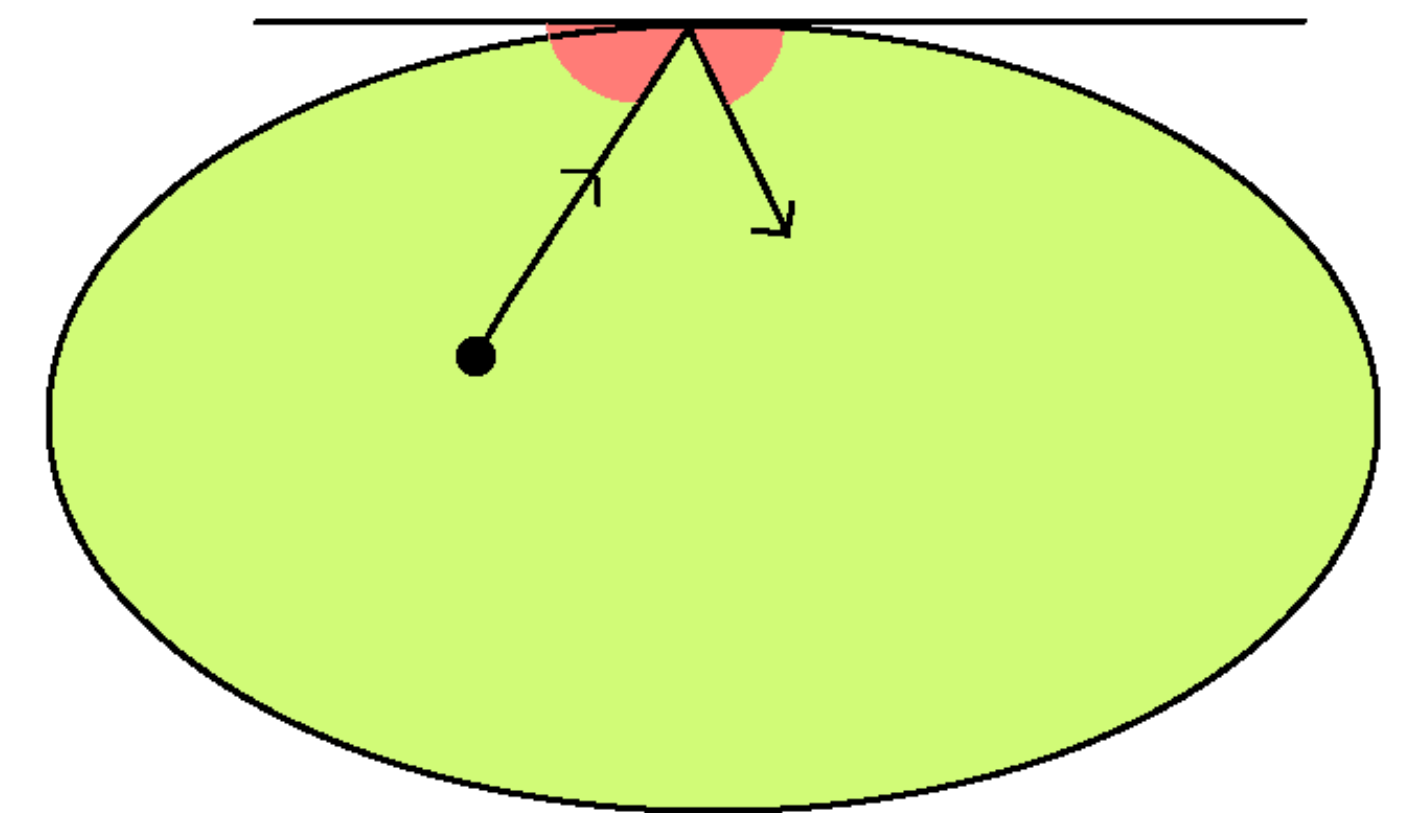
Hyperbolique



Rationnel

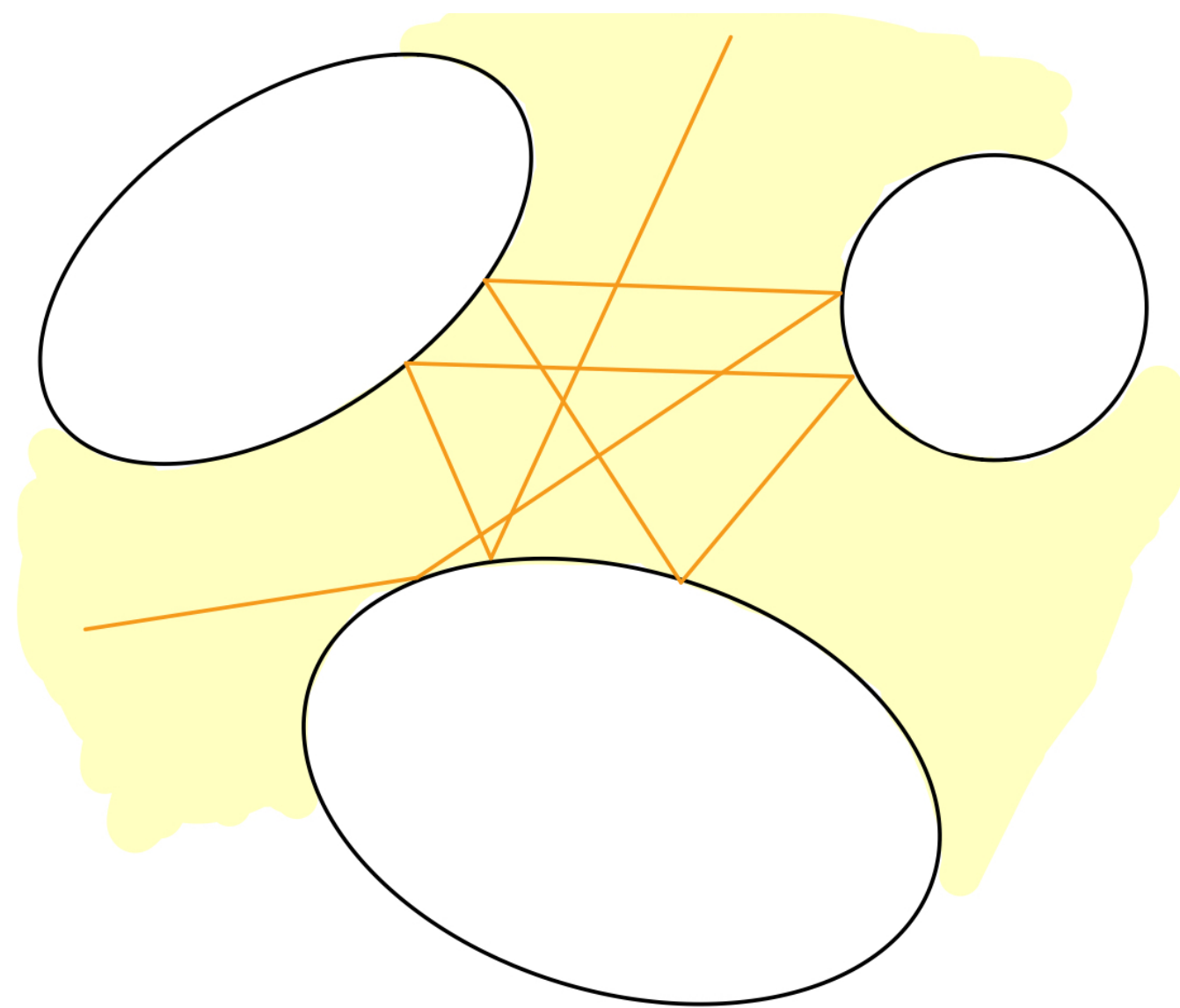


Convexe

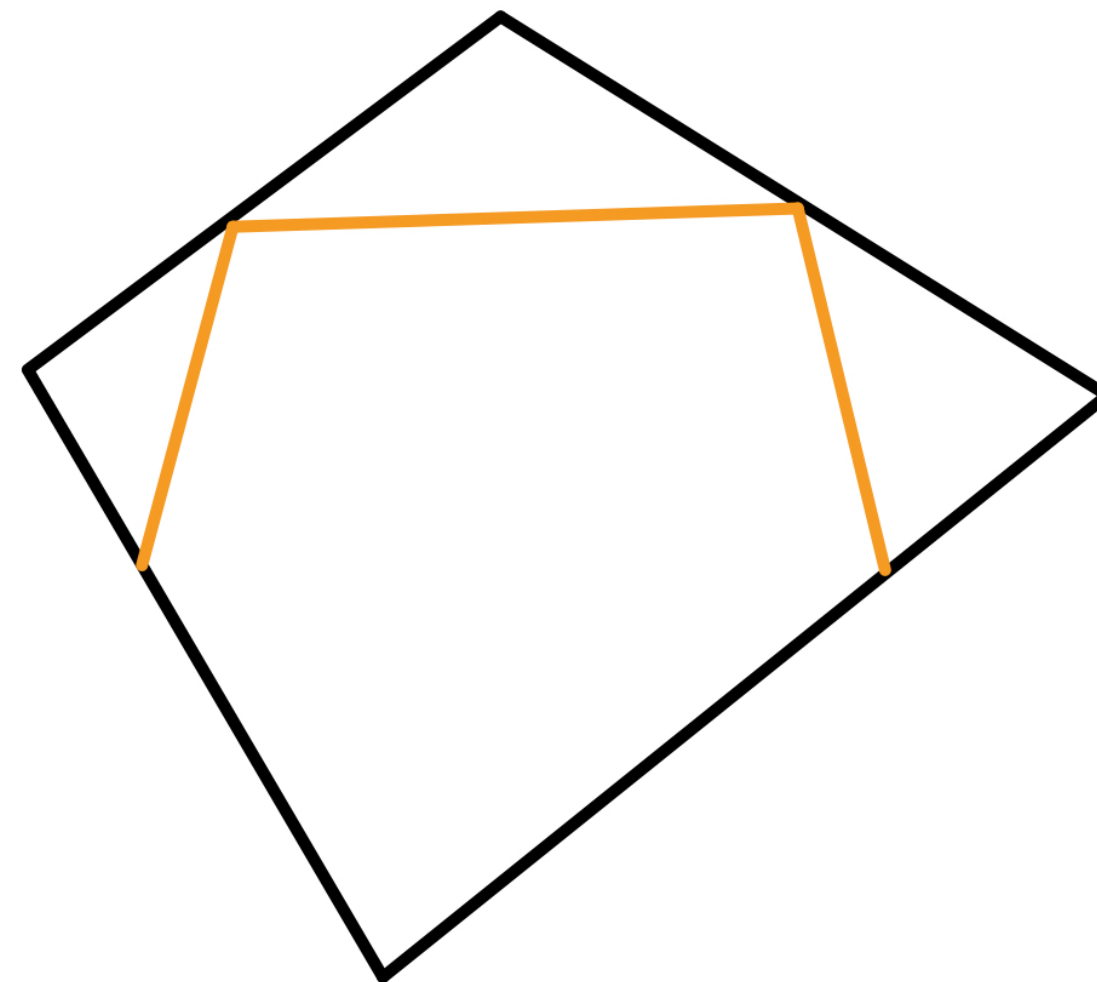


Dans quel billard voulez-vous jouer ?

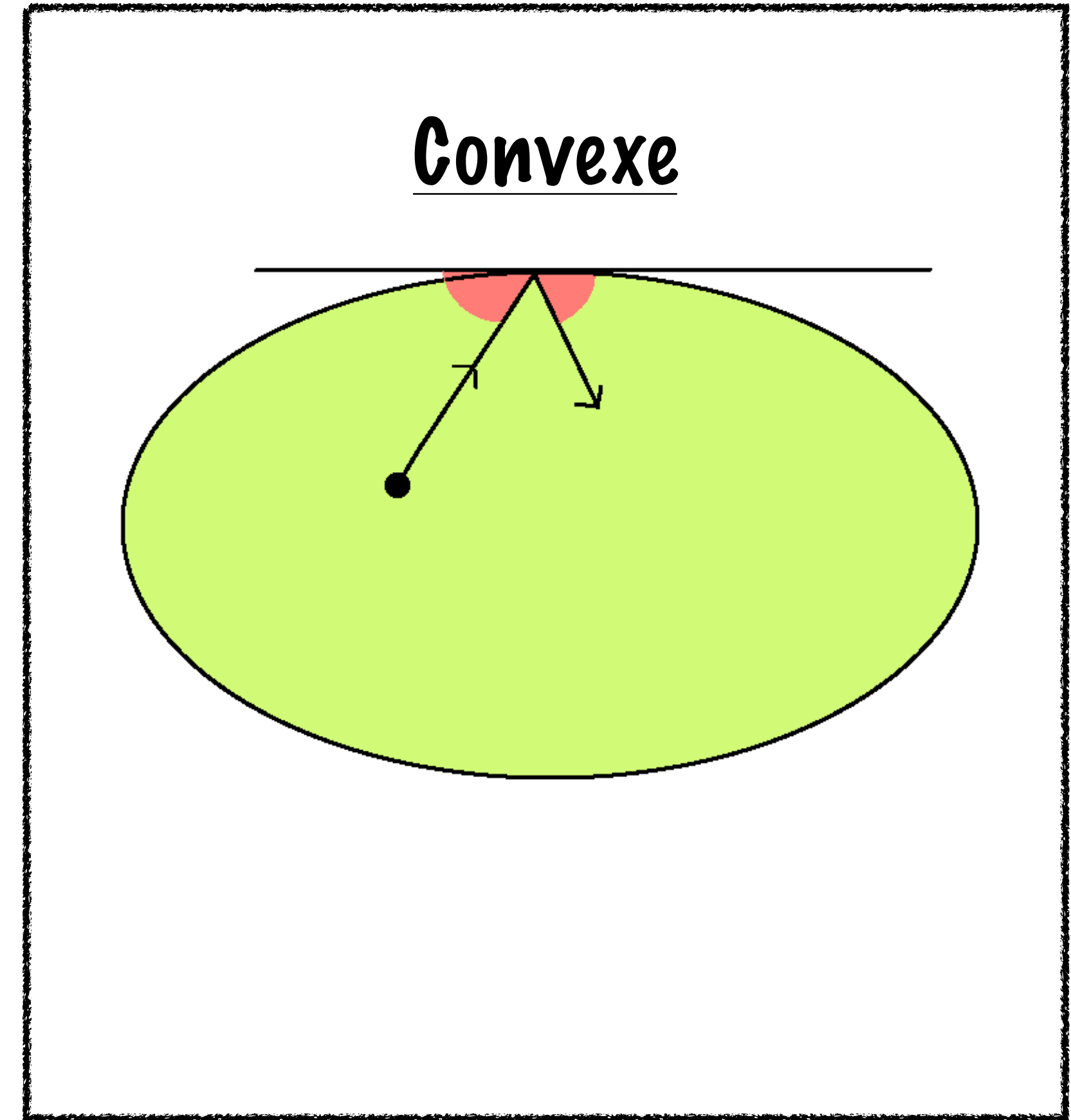
Hyperbolique



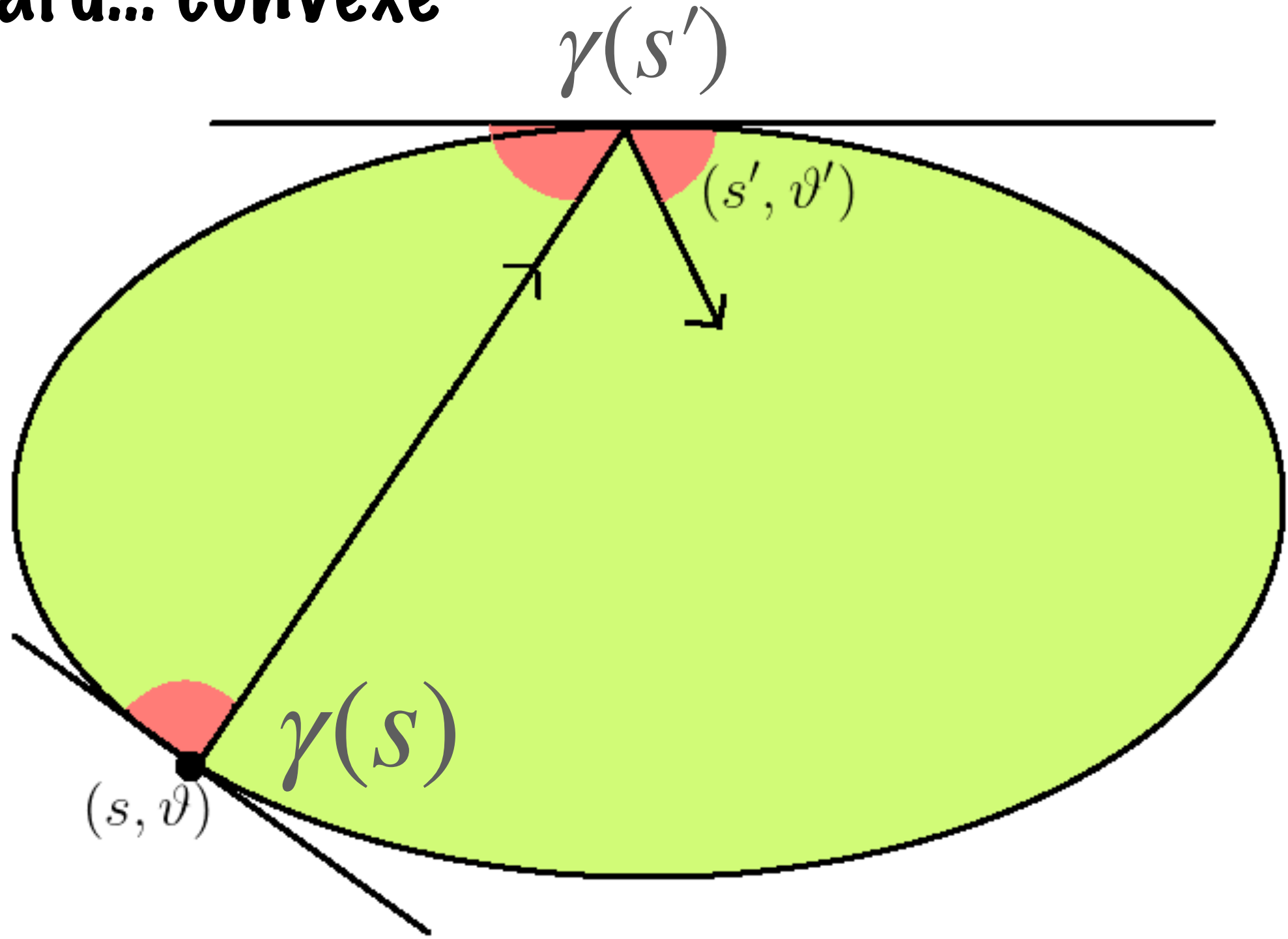
Rationnel



Convexe



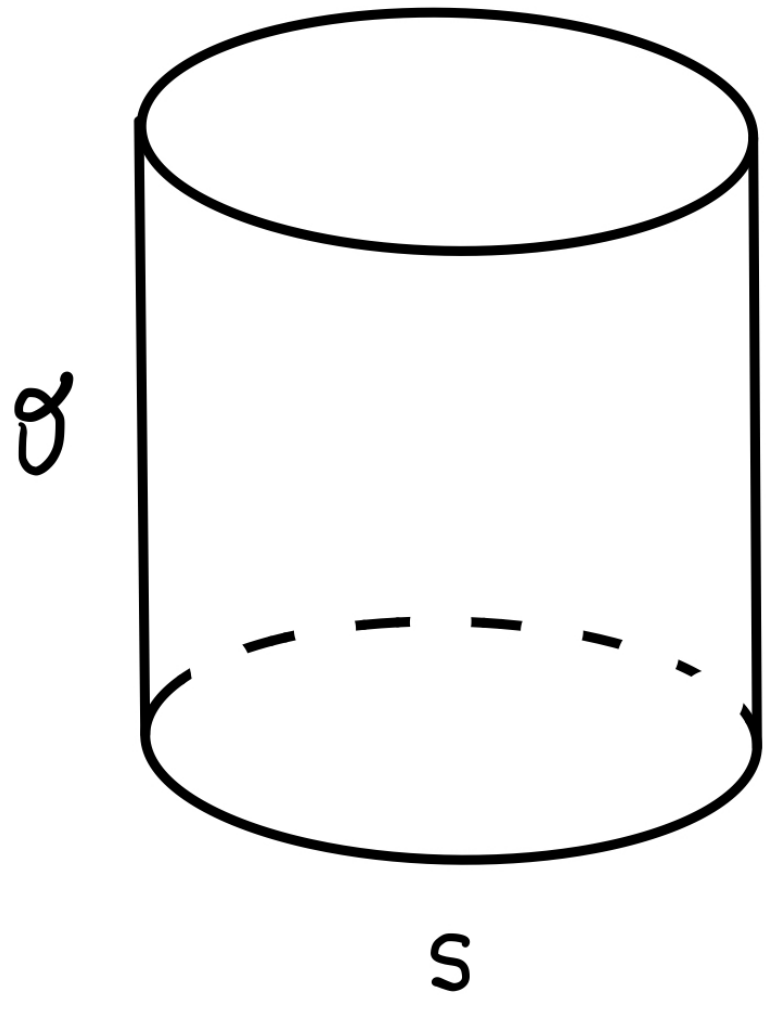
Birkhoff joue au billard... convexe

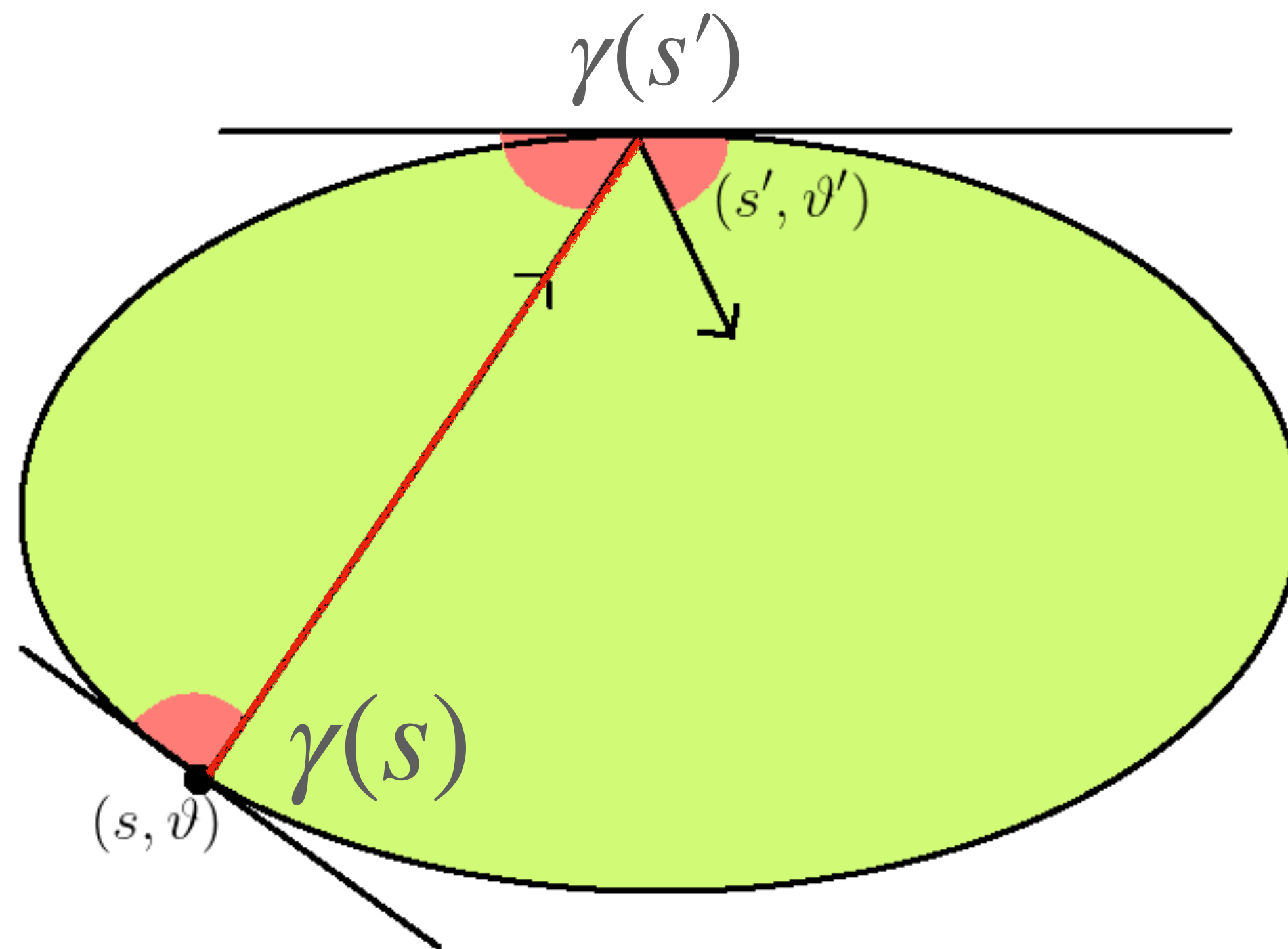


$\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\gamma(\mathbb{S}^1) = \partial\Omega$

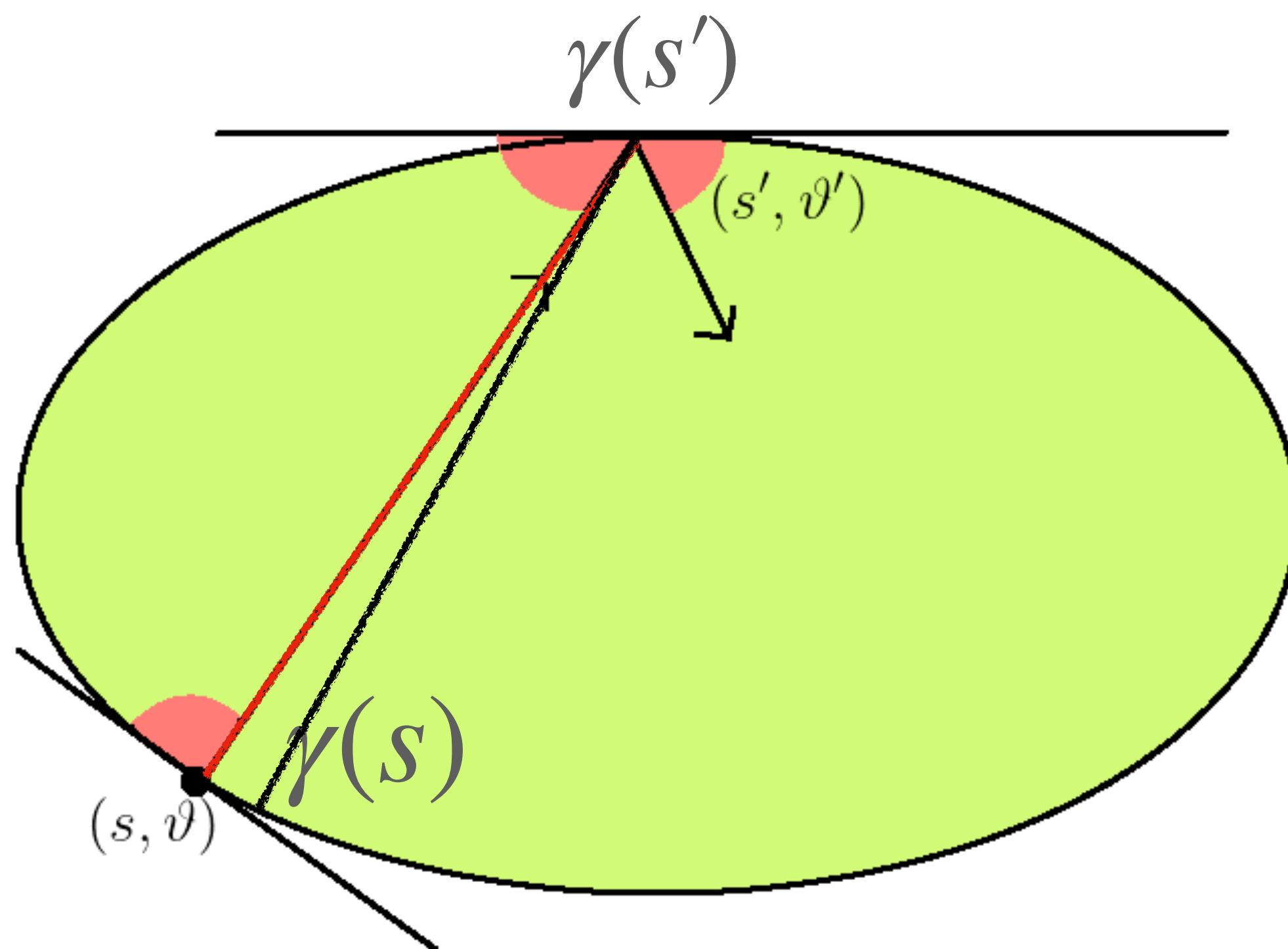
Application billard sur

$\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times [0, \pi]$
 $f(s, \theta) = (s', \theta')$





Fonction génératrice : distance entre deux rebonds successifs $\tau(s, s') = \|\gamma(s) - \gamma(s')\|$



$$\begin{aligned}
 \tau(s + \varepsilon, s') &= \|\gamma(s) + \gamma'(s)\varepsilon + o(\varepsilon^2) - \gamma(s')\| &= \sqrt{\|\gamma(s) - \gamma(s')\|^2 + 2\varepsilon\langle\gamma'(s), \gamma(s) - \gamma(s')\rangle + o(\varepsilon^2)} \\
 & &= \|\gamma(s) - \gamma(s')\| + \varepsilon\left\langle\gamma'(s), \frac{\gamma(s) - \gamma(s')}{\|\gamma(s) - \gamma(s')\|}\right\rangle + o(\varepsilon^2) \\
 & &= \|\gamma(s) - \gamma(s')\| - \varepsilon\cos(\theta) + o(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

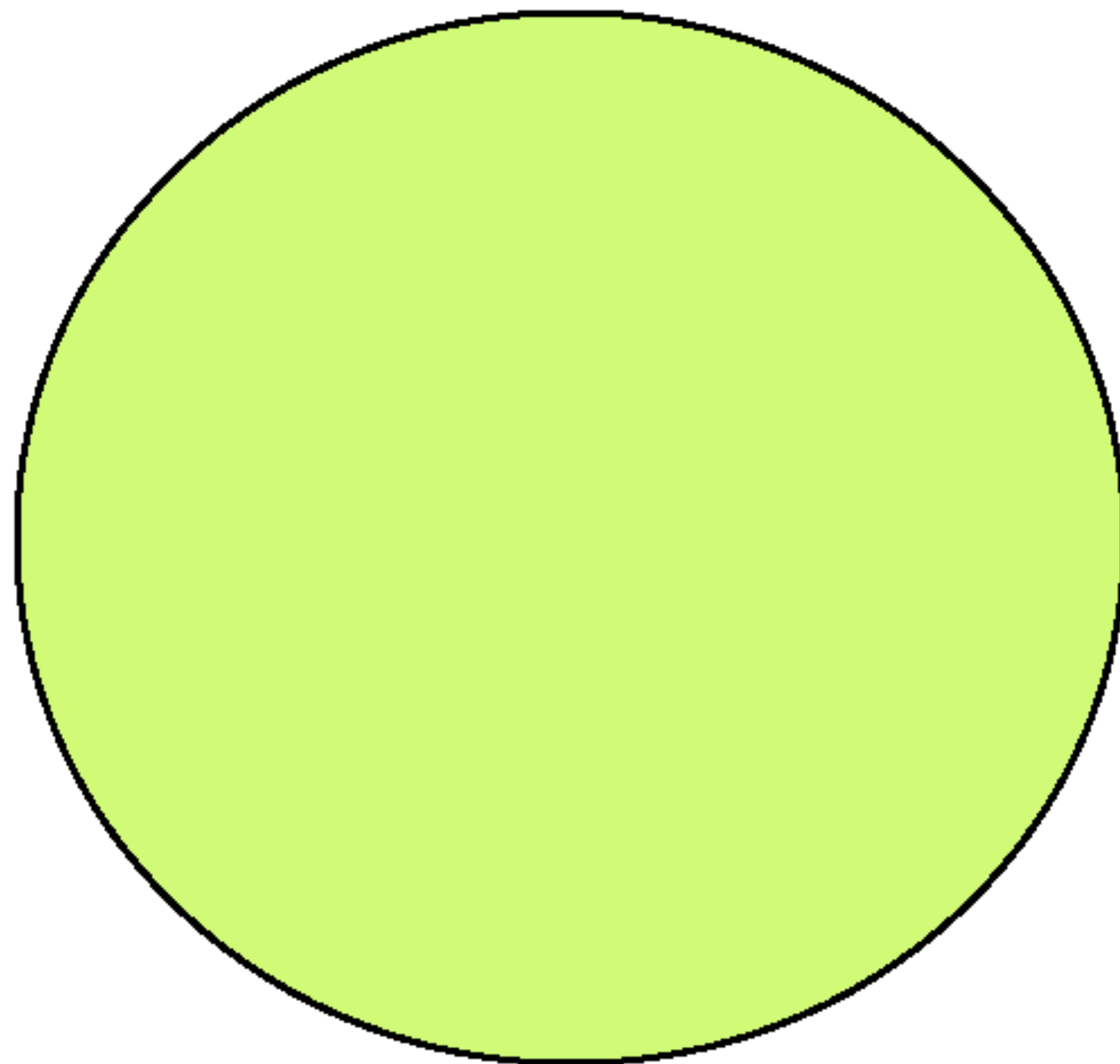
De la fonction génératrice à la dynamique !

$$\partial_1 \tau(s, s') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau(s + \varepsilon, s') - \tau(s, s')}{\varepsilon} = -\cos(\theta)$$

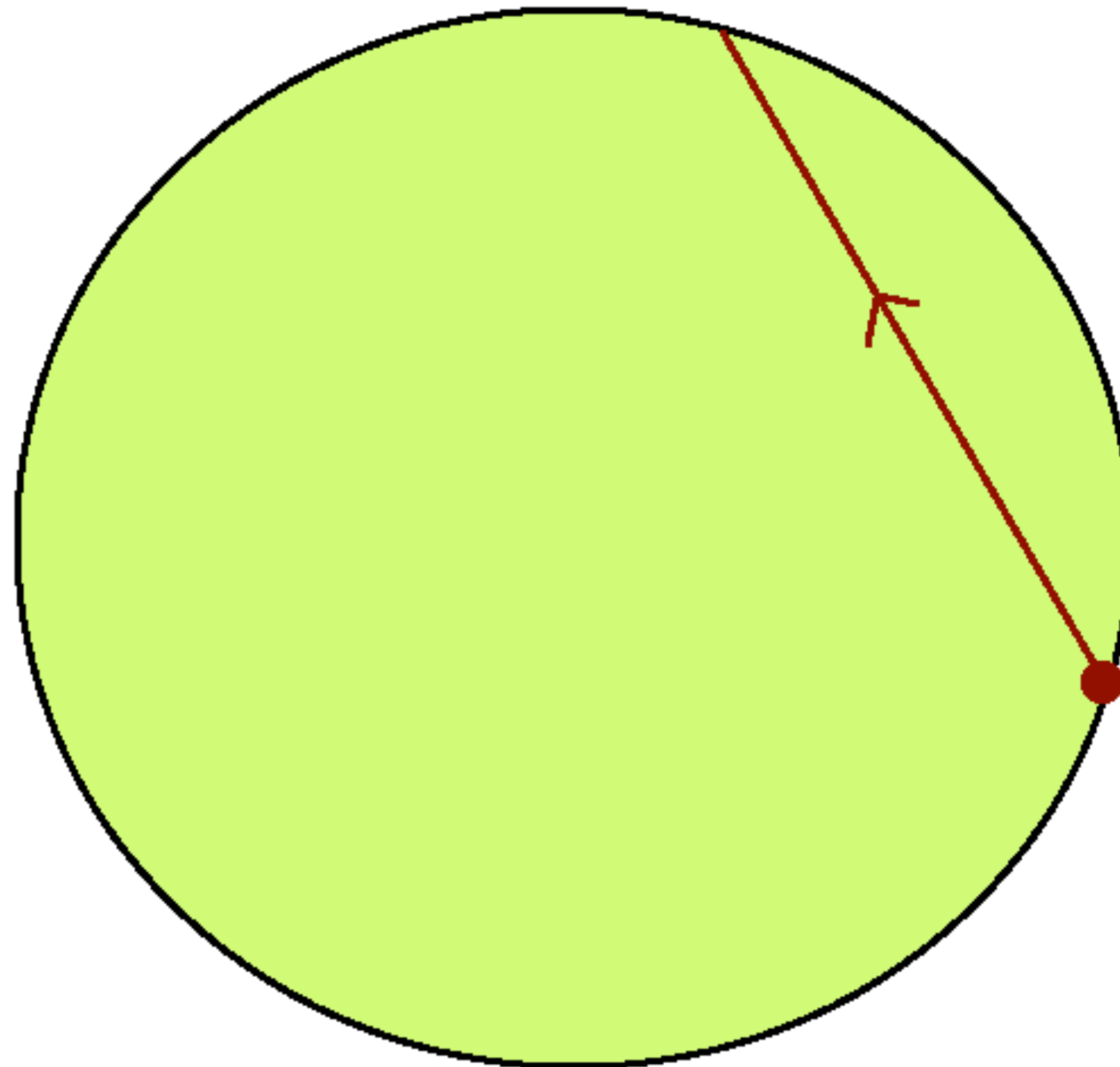
$$\partial_2 \tau(s, s') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tau(s, s' + \varepsilon) - \tau(s, s')}{\varepsilon} = \cos(\theta')$$

- l'application billard préserve une forme d'aire sur le cylindre
- pour chaque entier $p > 1$, il y a au moins deux orbites périodiques de période p

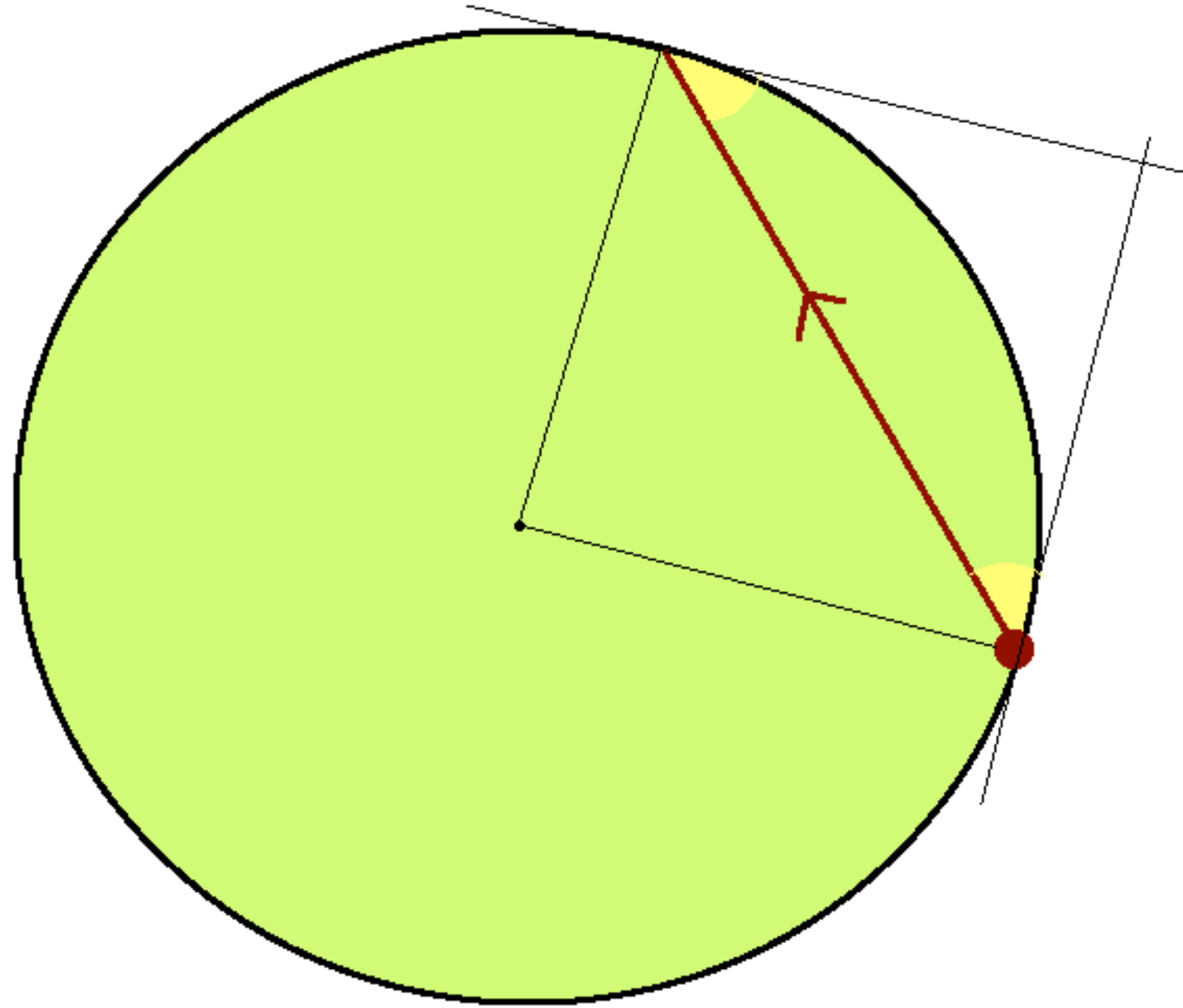
Exemple 0 : le cercle



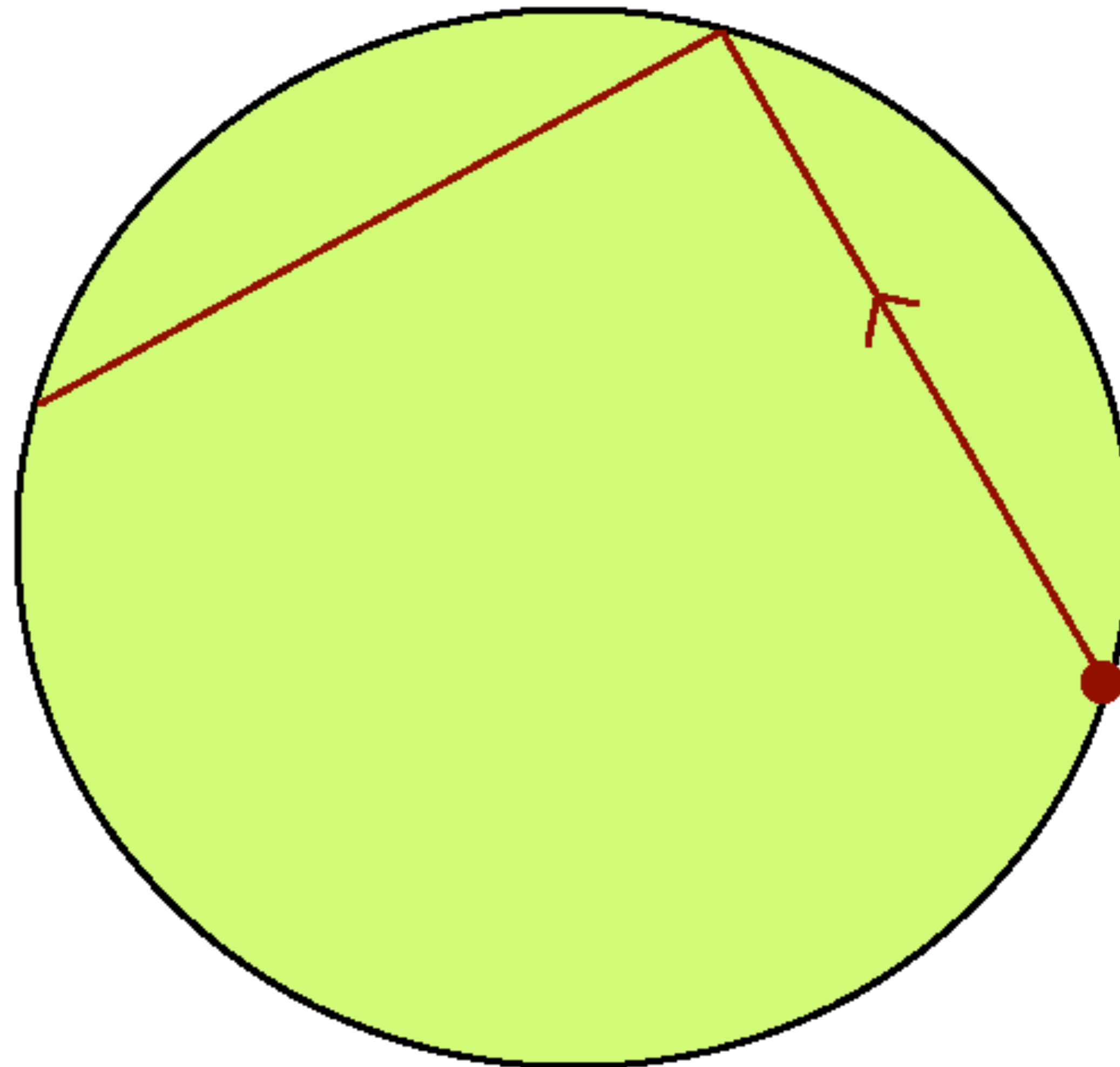
Exemple 0 : le cercle



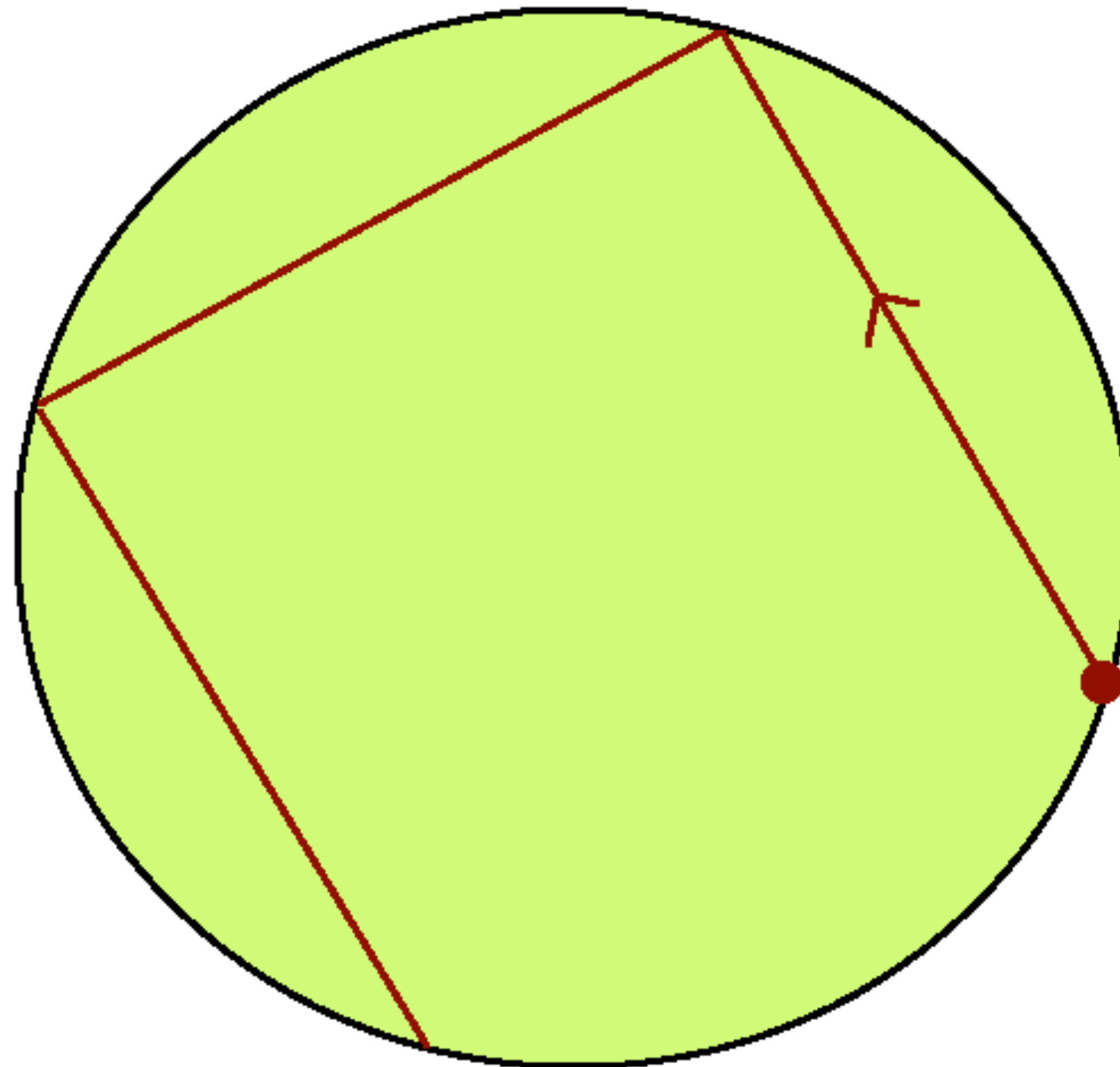
Exemple 0 : le cercle



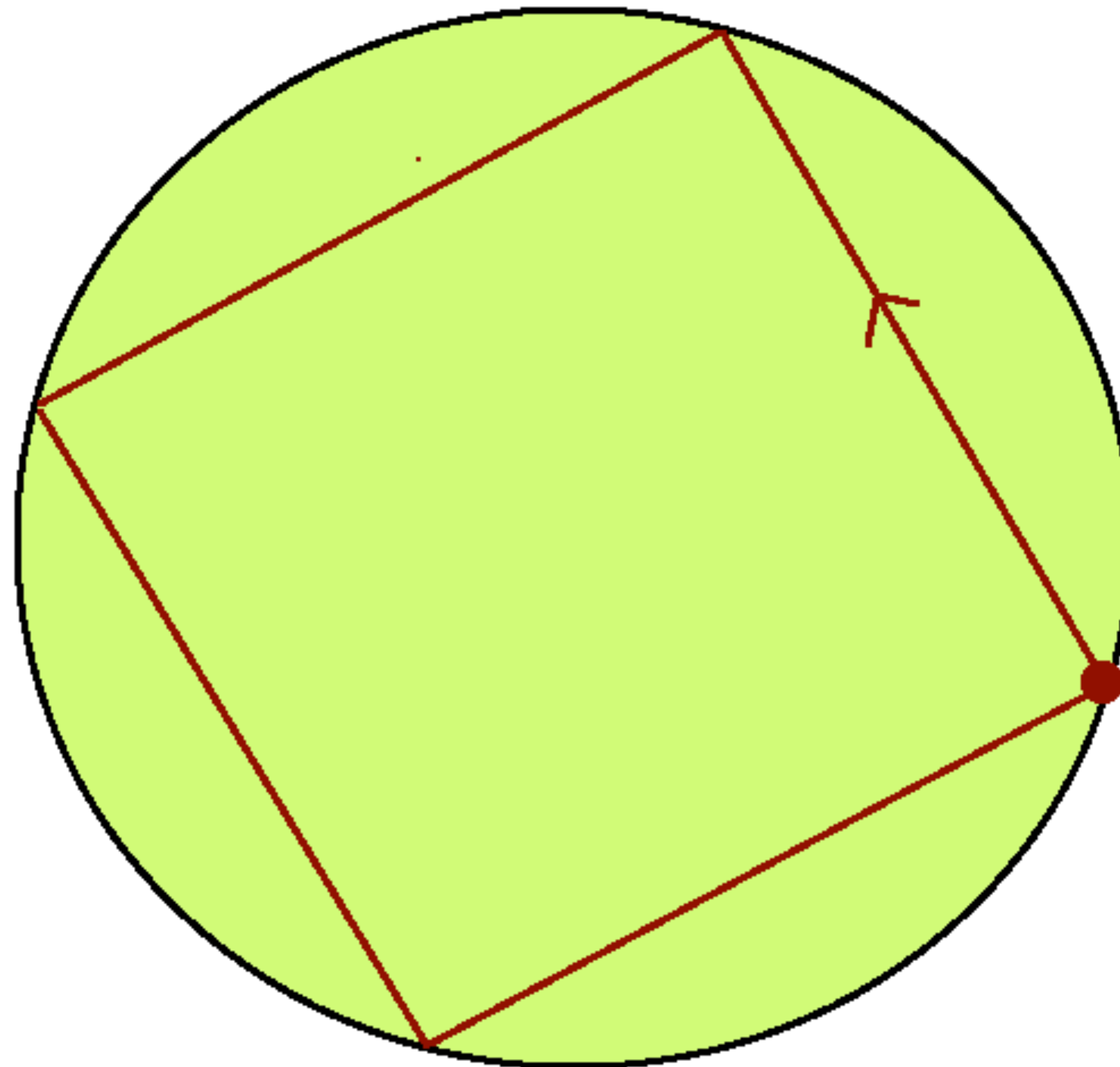
Exemple 0 : le cercle



Exemple 0 : le cercle

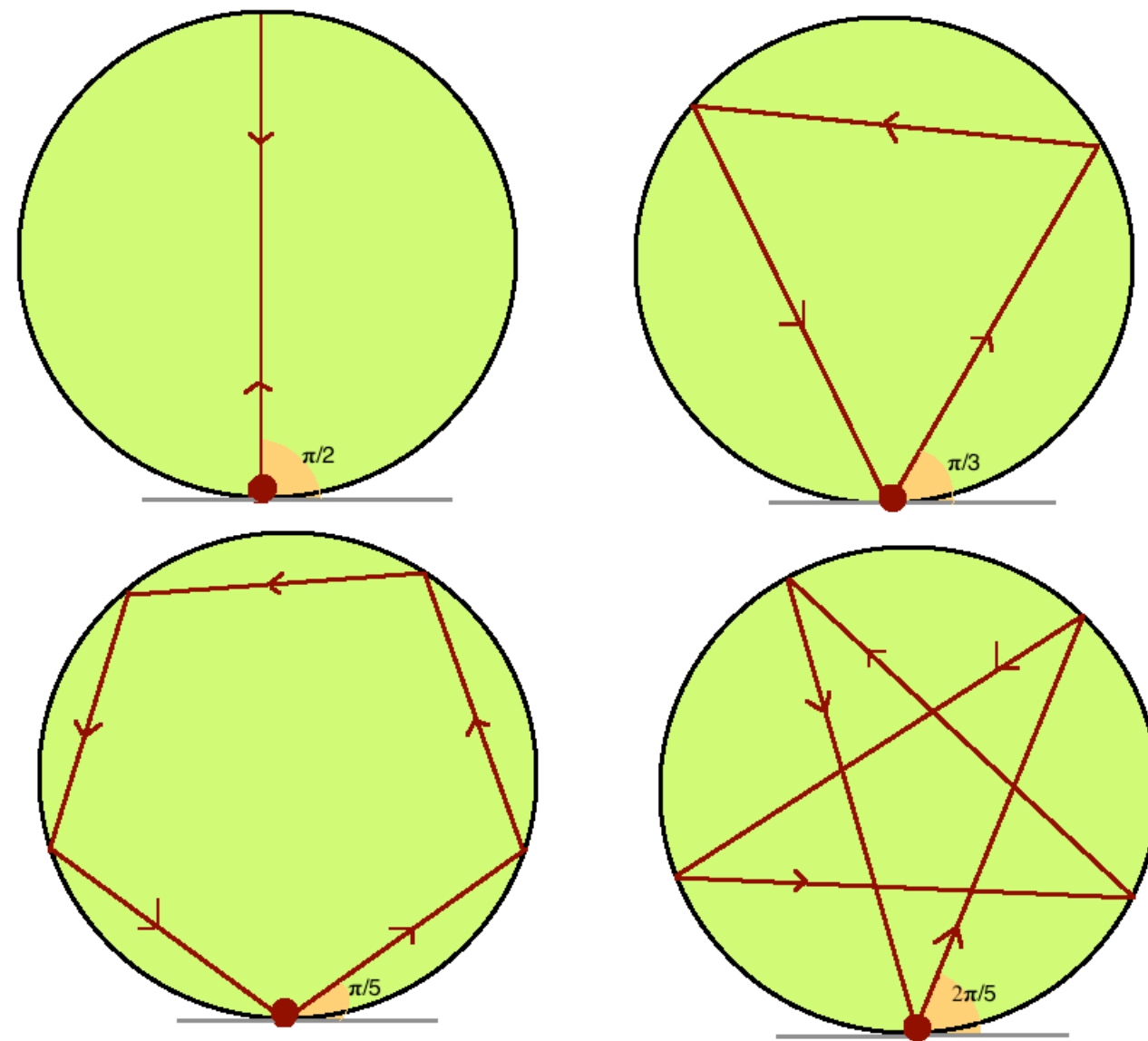


Exemple 0 : le cercle

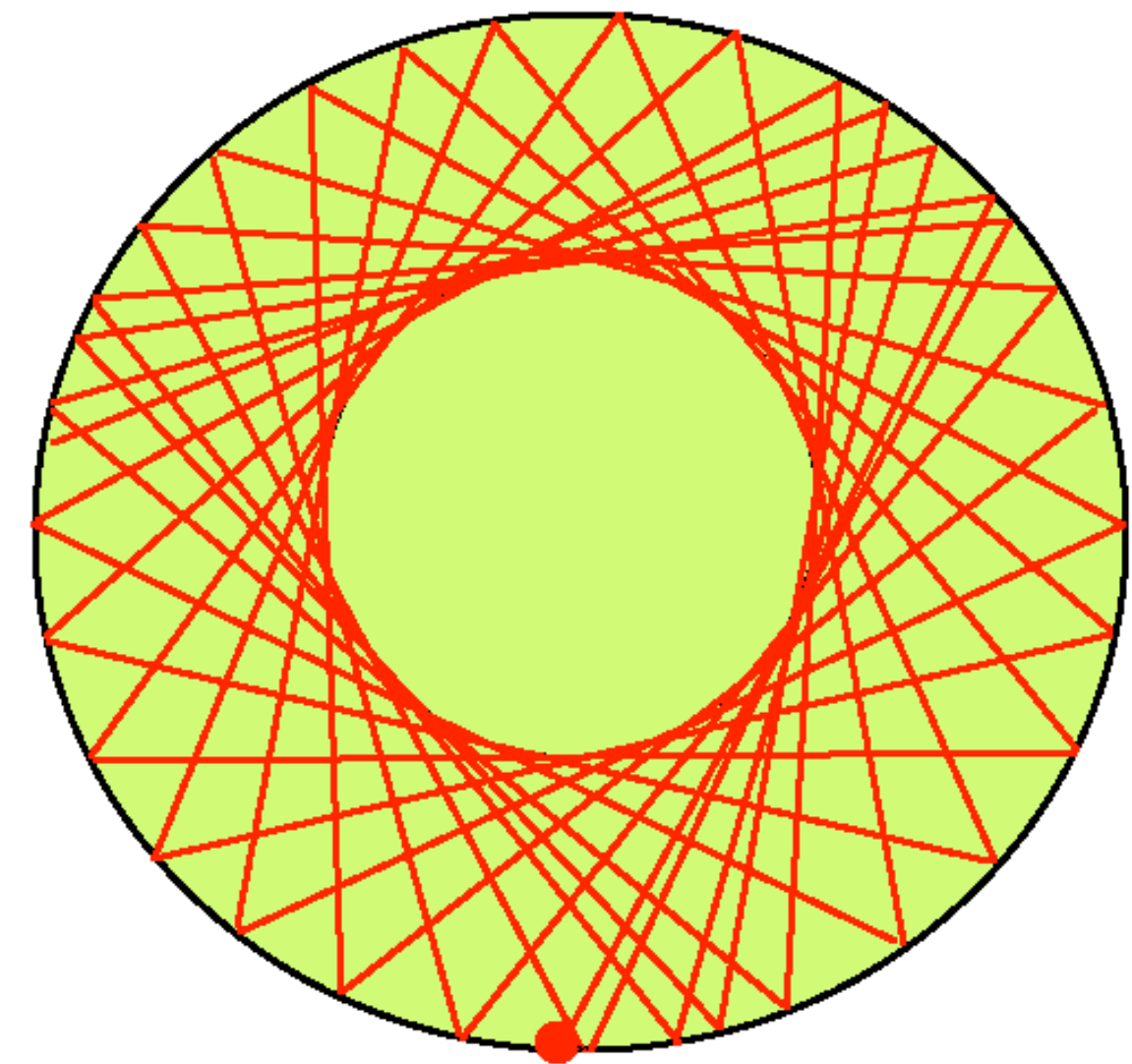


Exemple 0 : le cercle

$$\theta \in \mathbb{Q}\pi$$



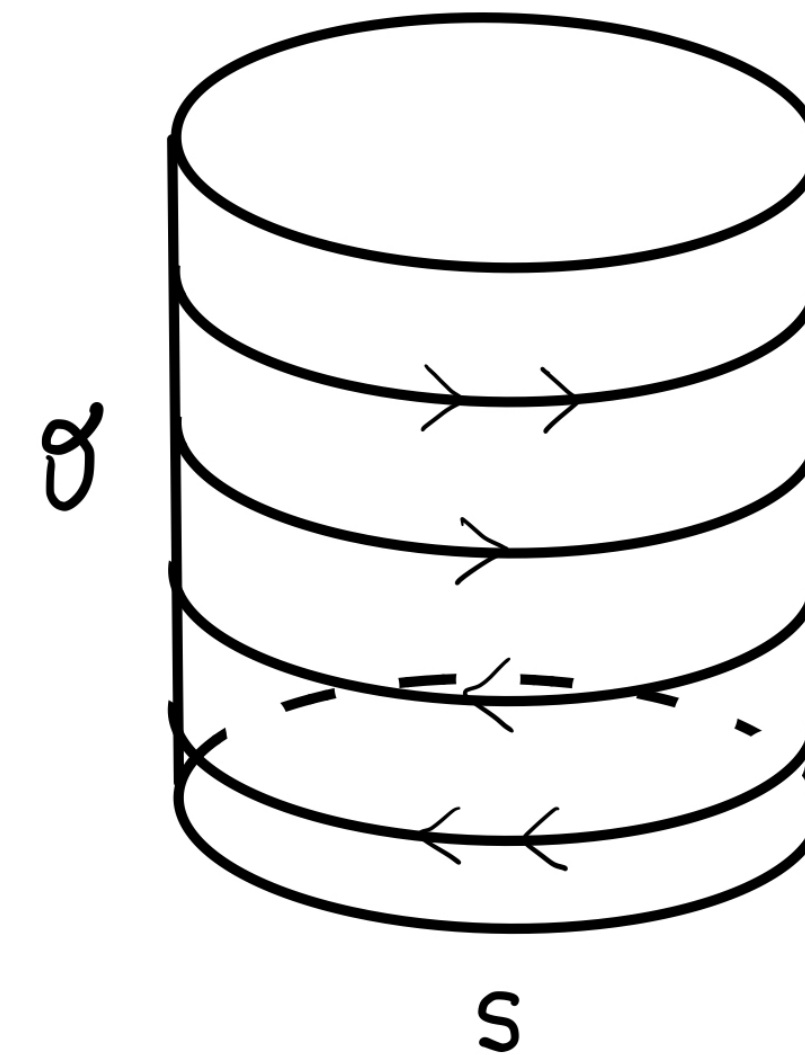
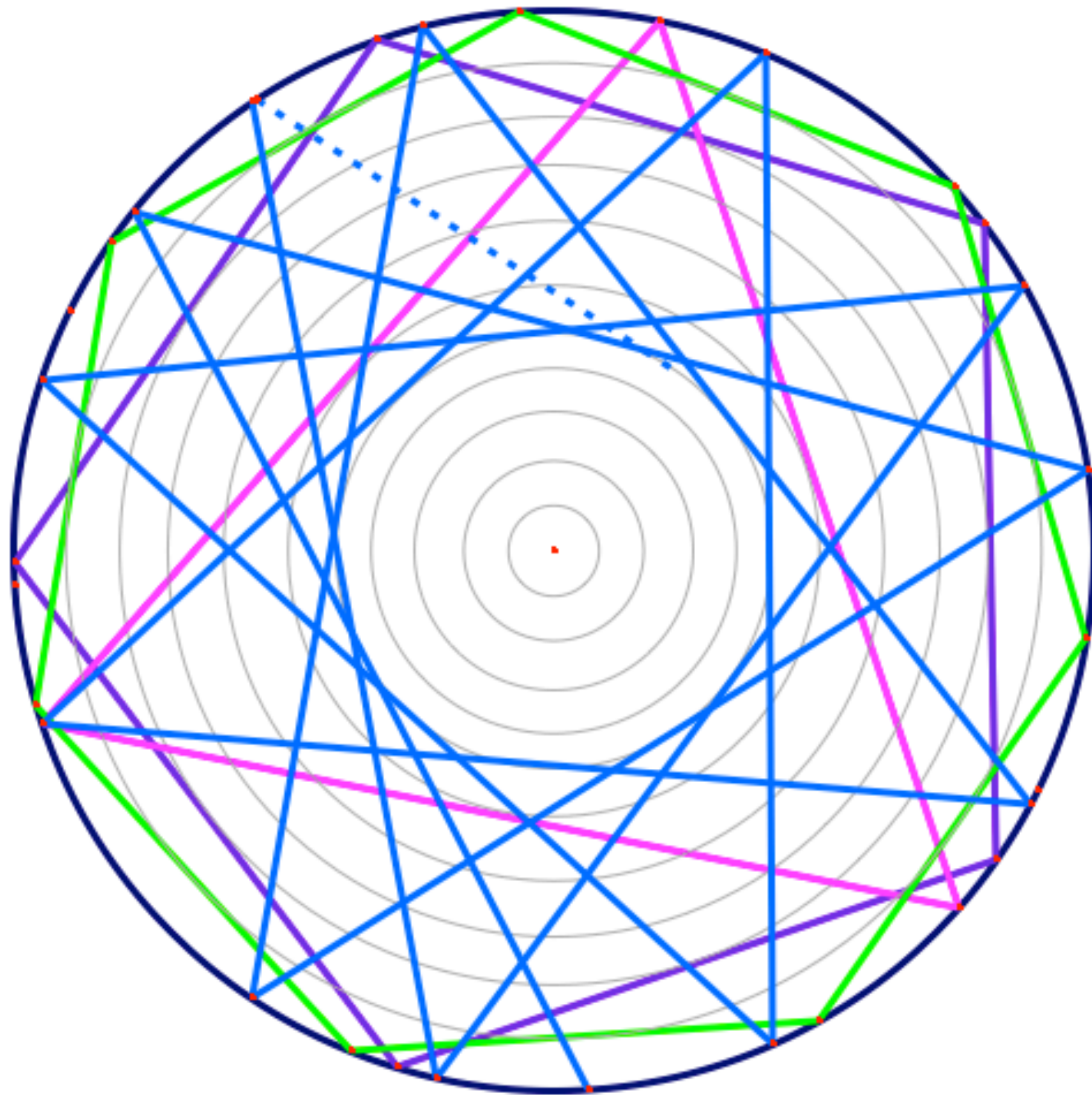
$$\theta \notin \mathbb{Q}\pi$$



Caustique

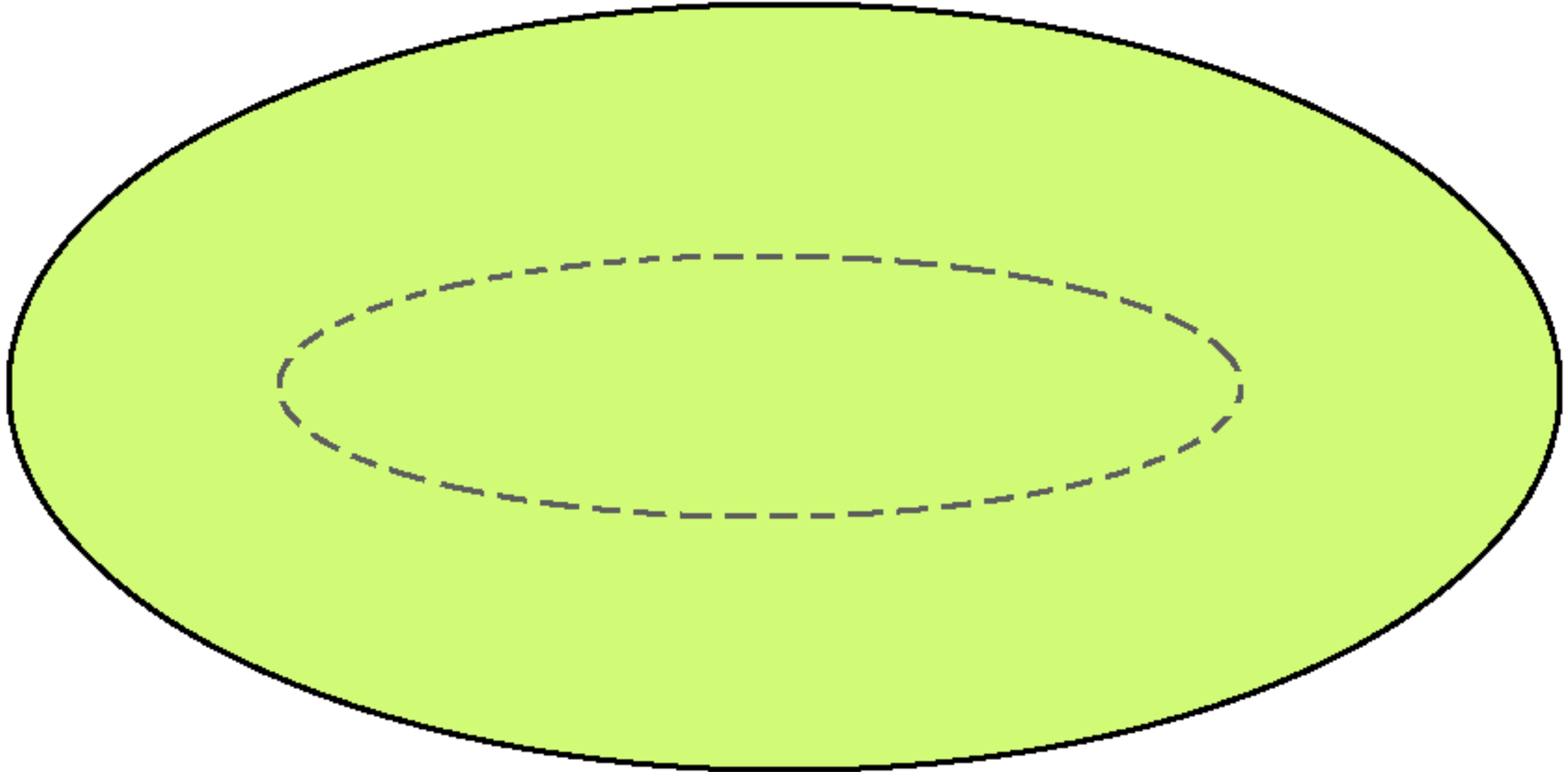
Exemple 0 : le cercle

Dans le cylindre : partition en cercles non triviaux

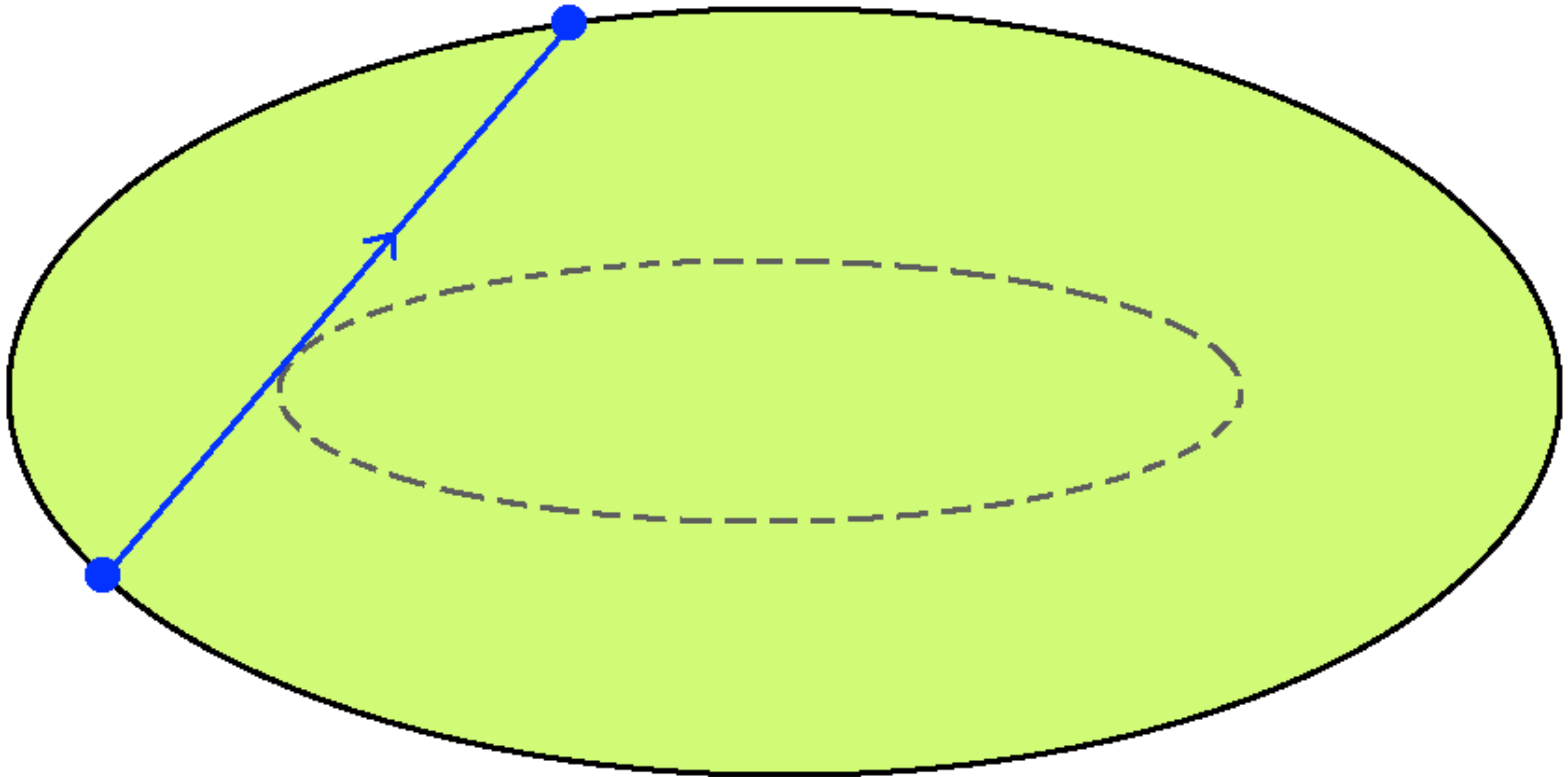


Intégrabilité !

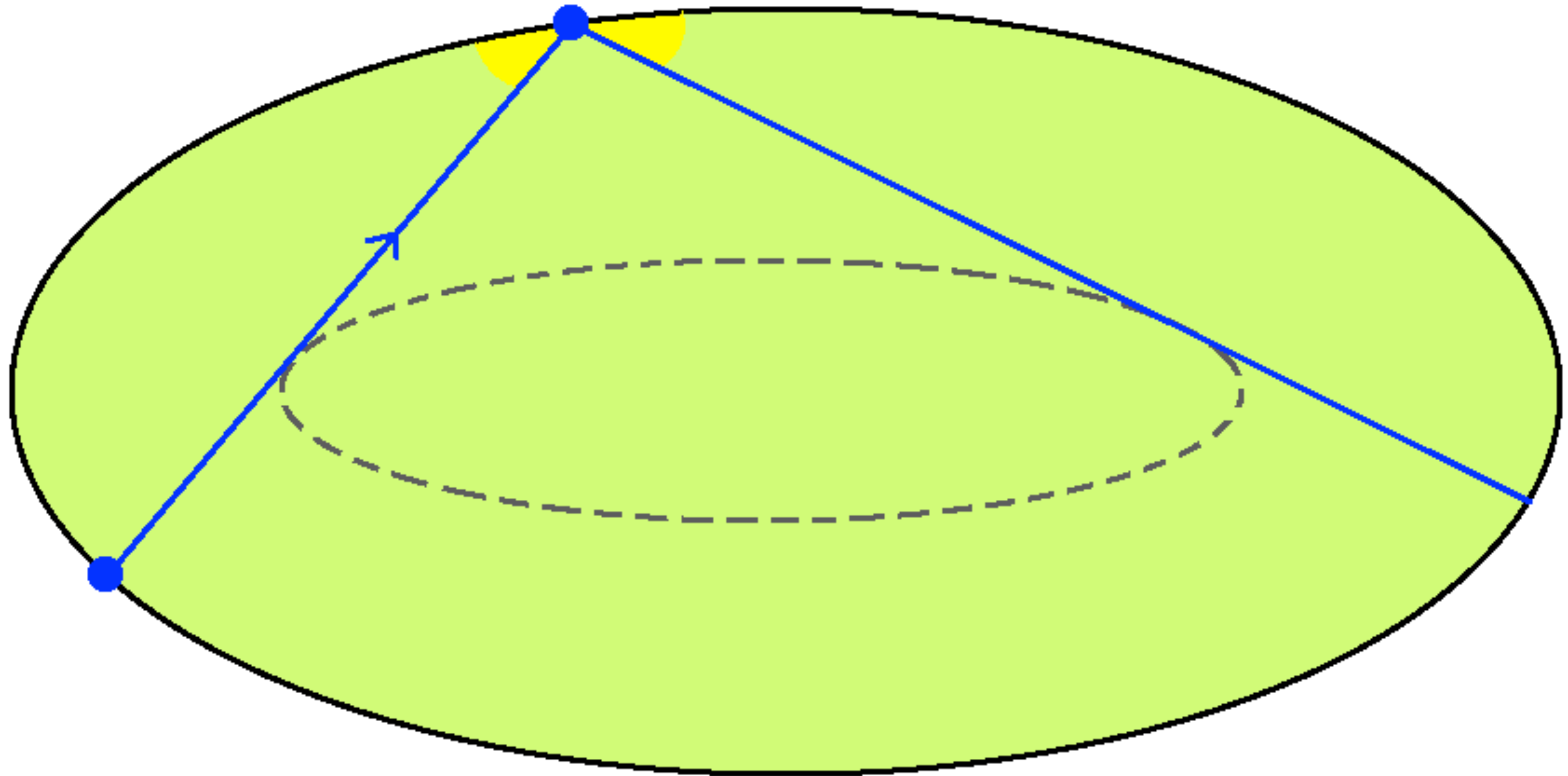
Ellipse



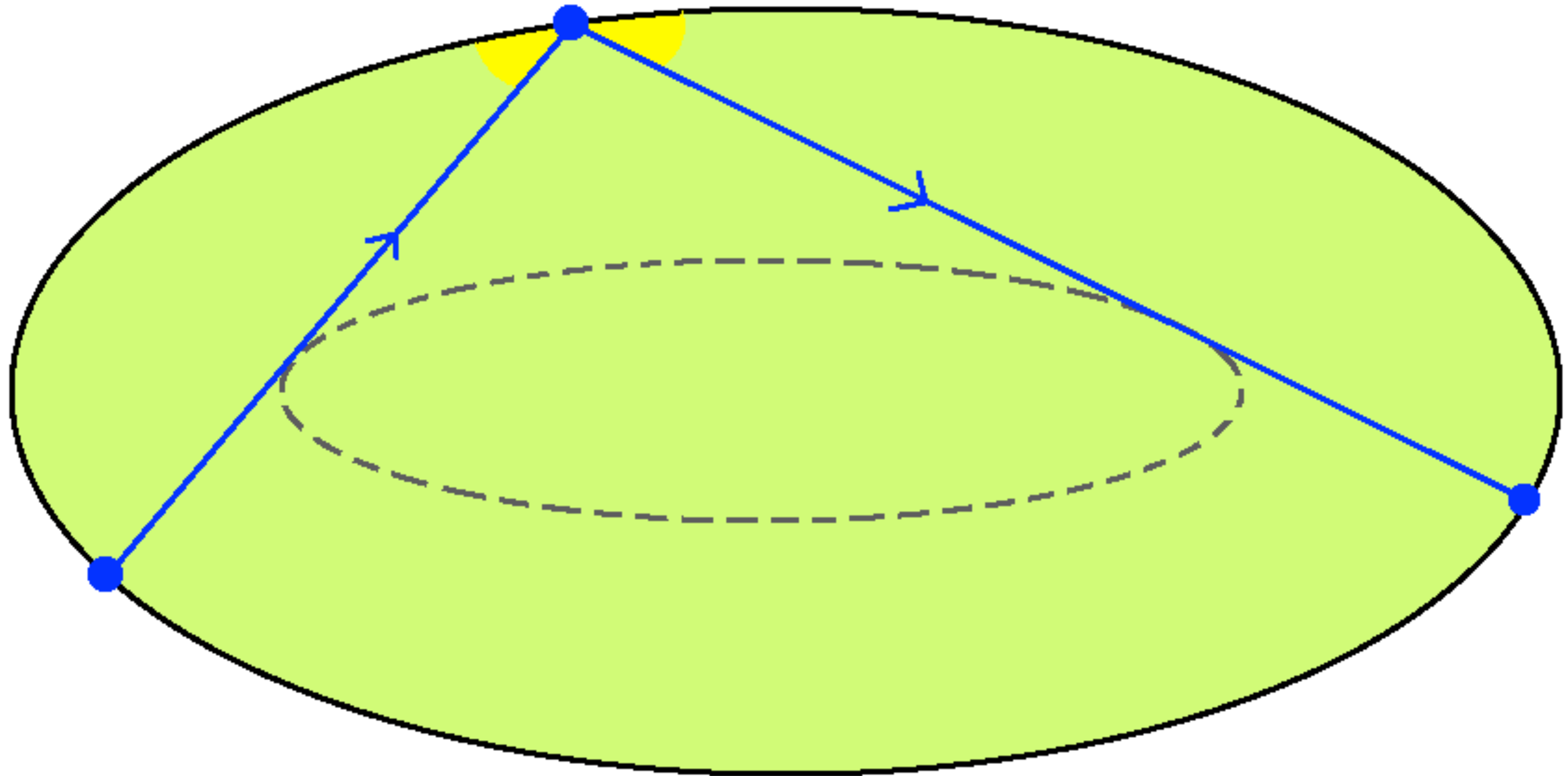
Ellipse



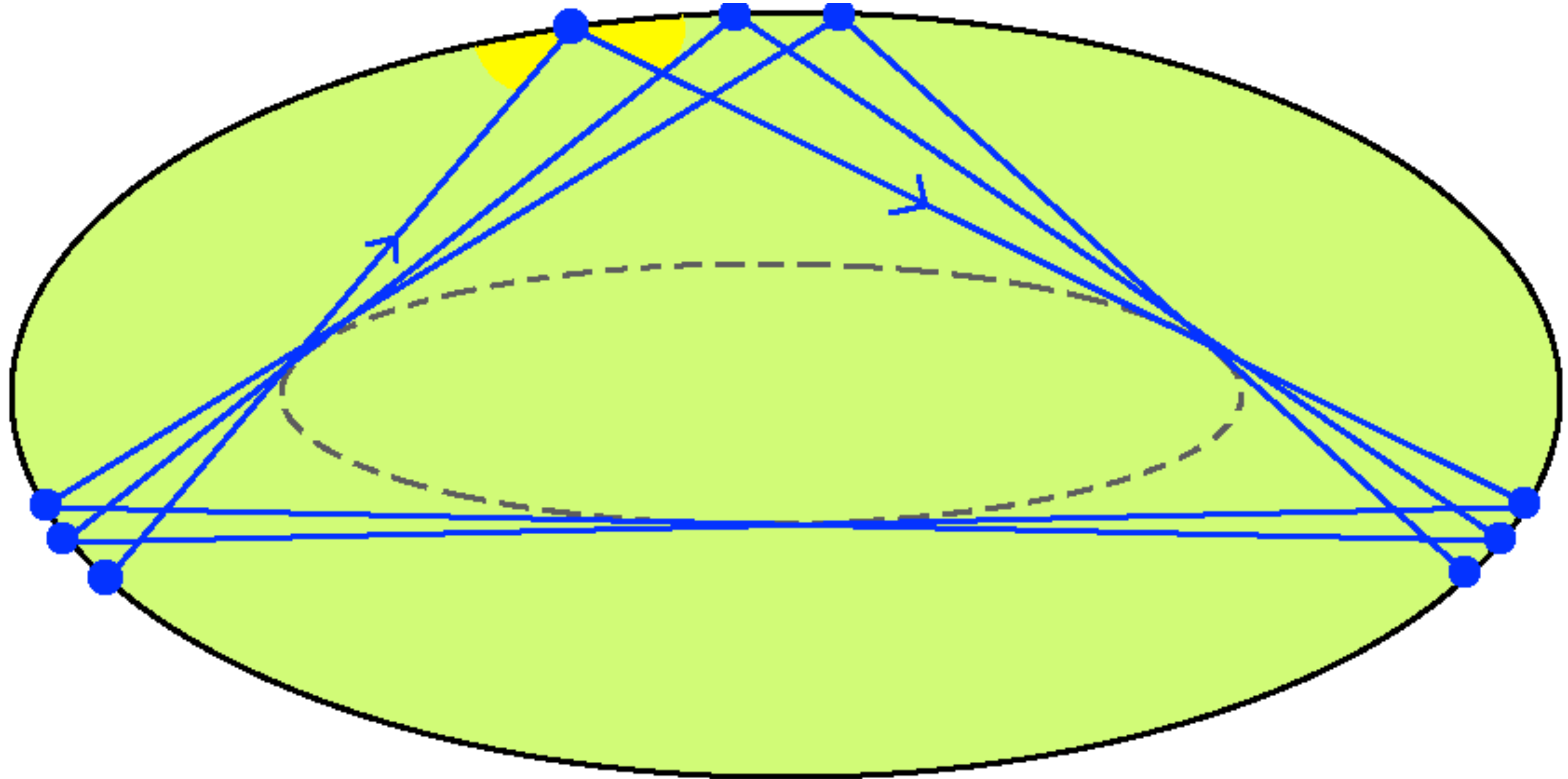
Ellipse



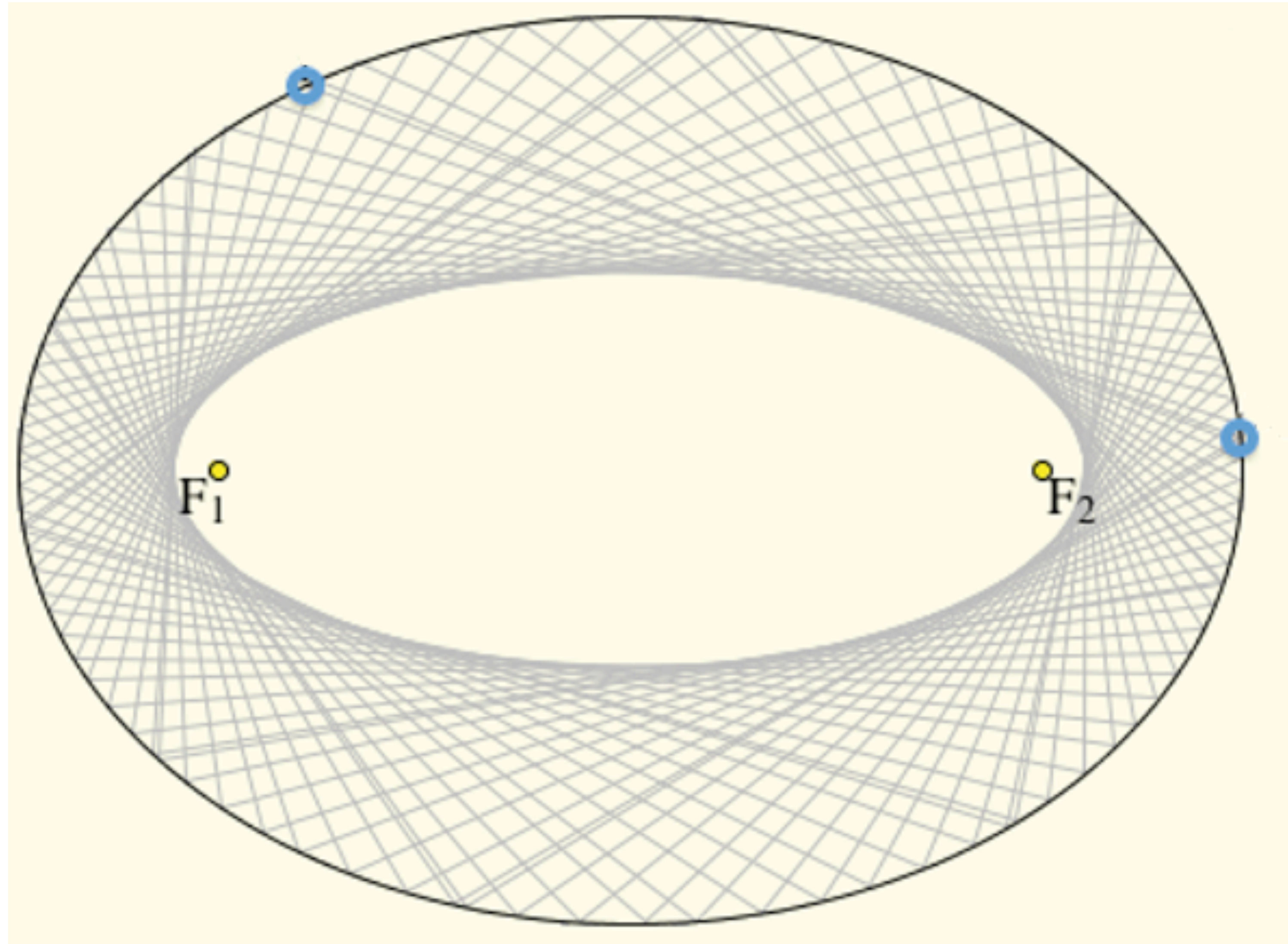
Ellipse



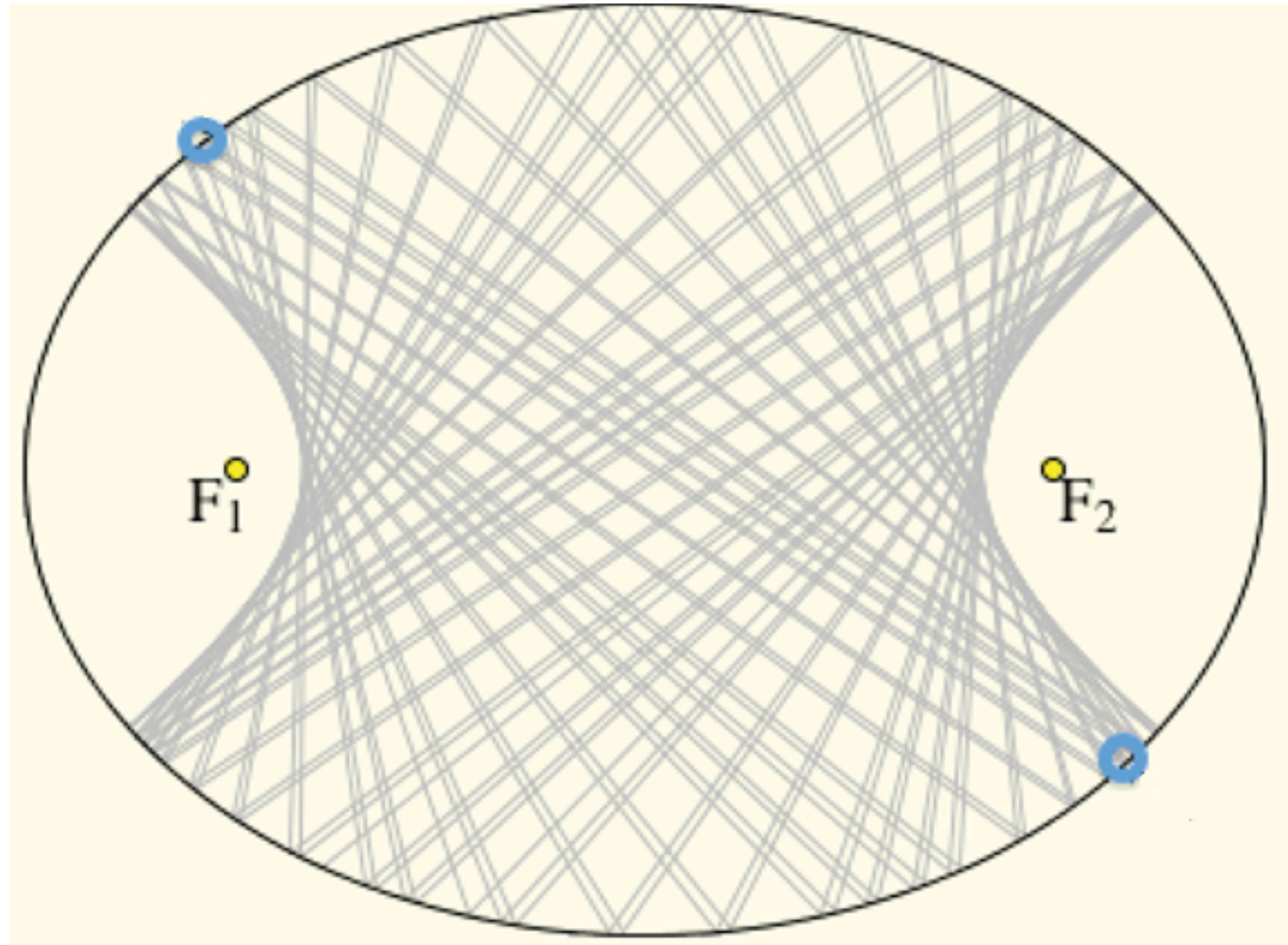
Ellipse



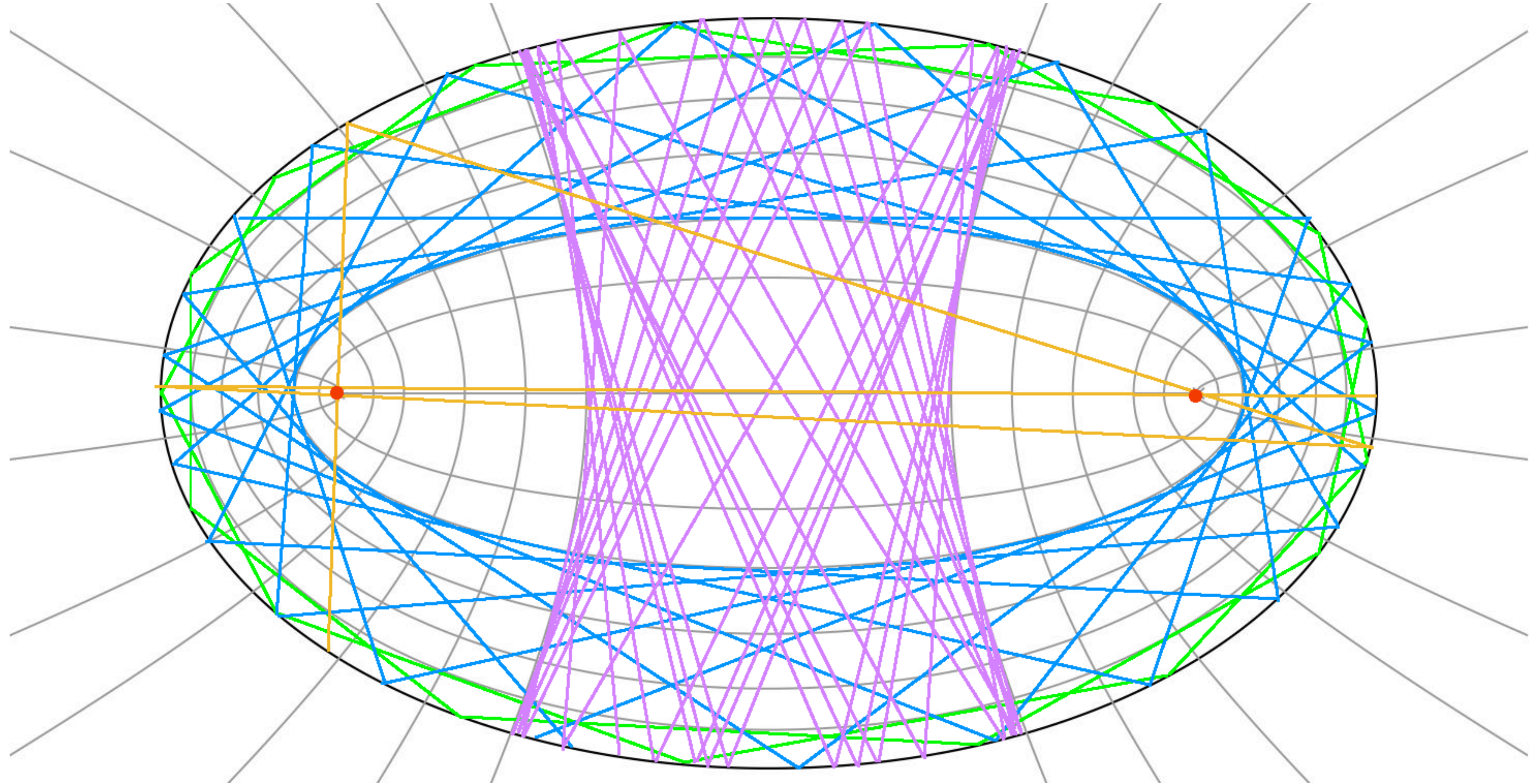
Ellipse



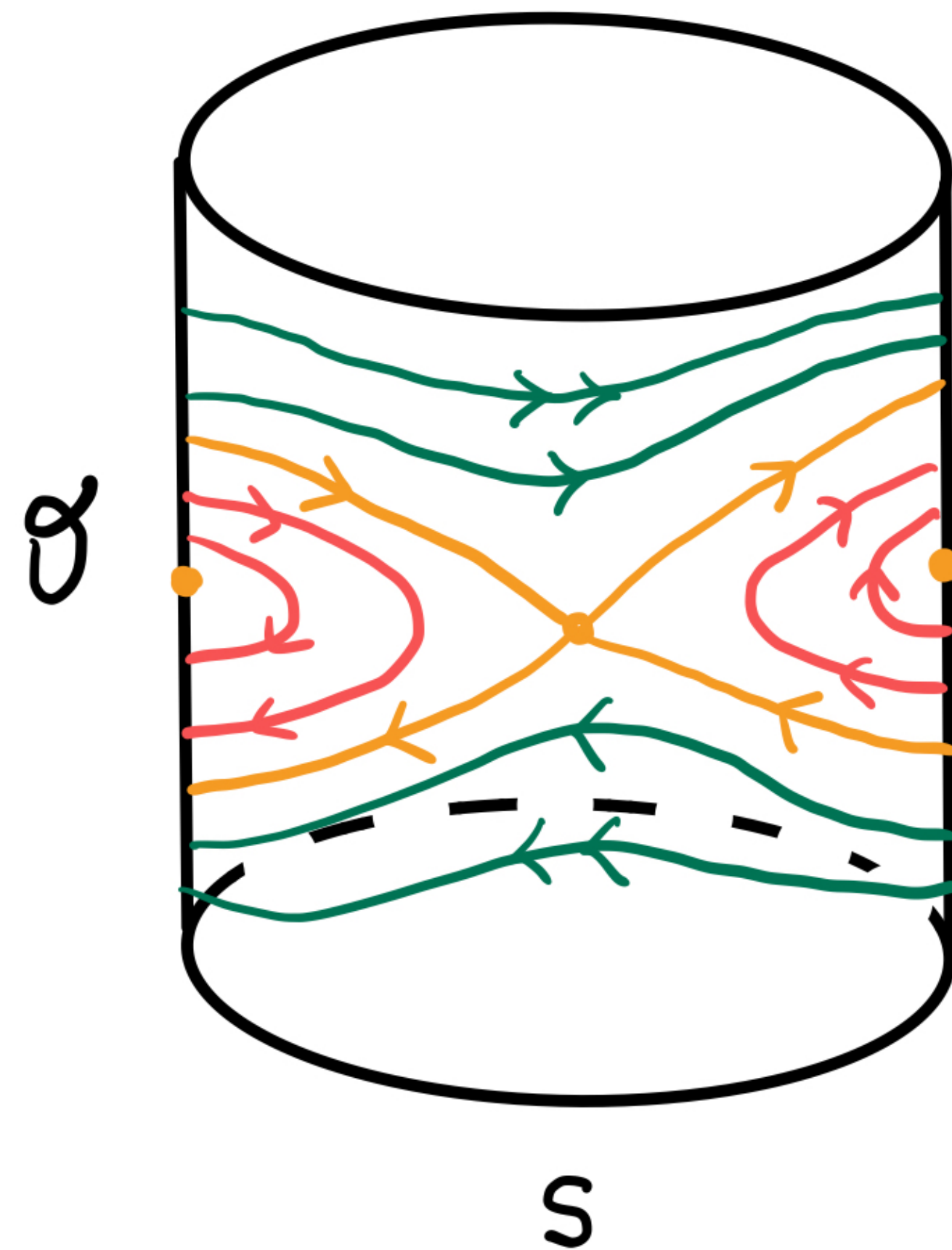
Ellipse



Ellipse



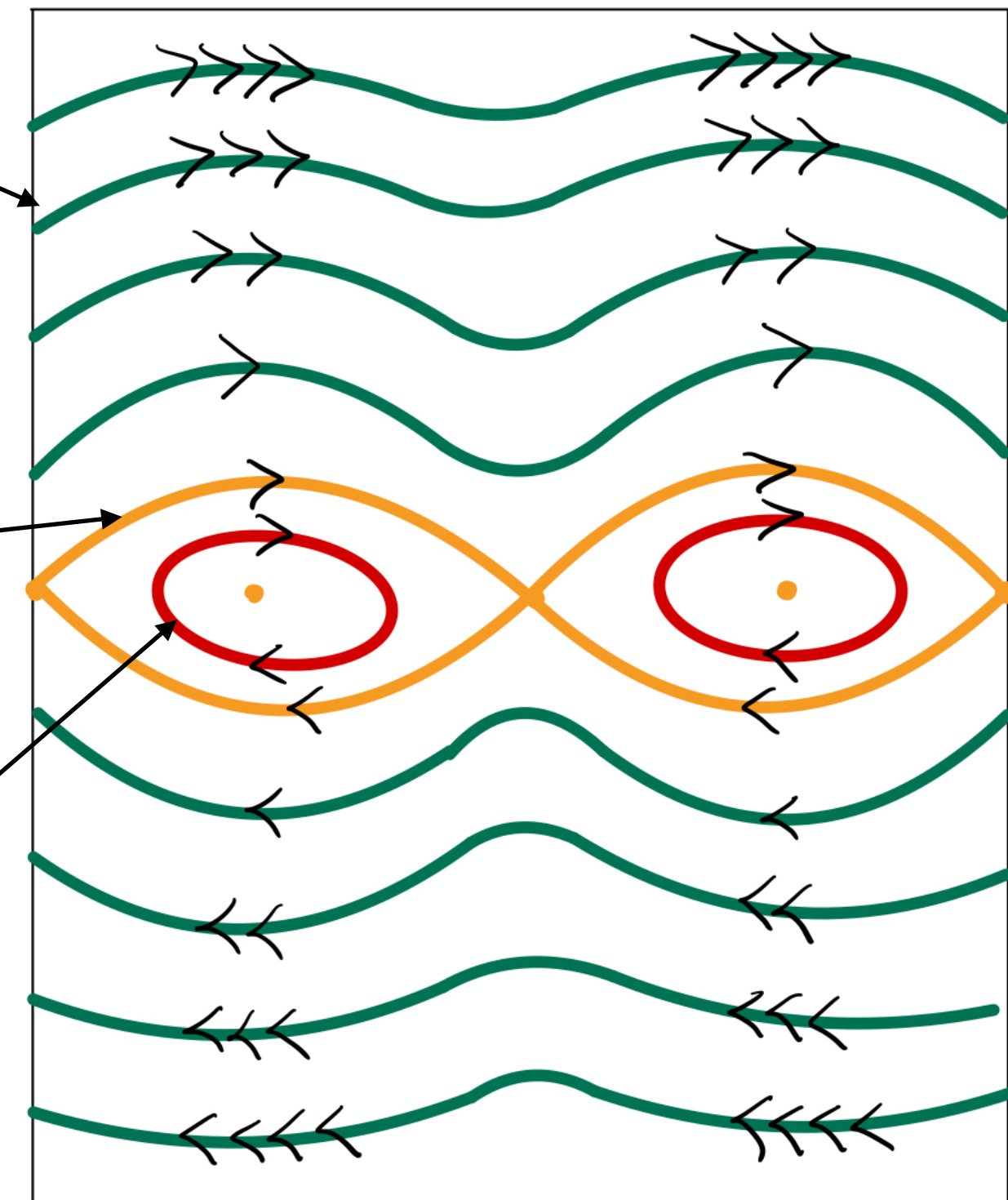
Ellipse



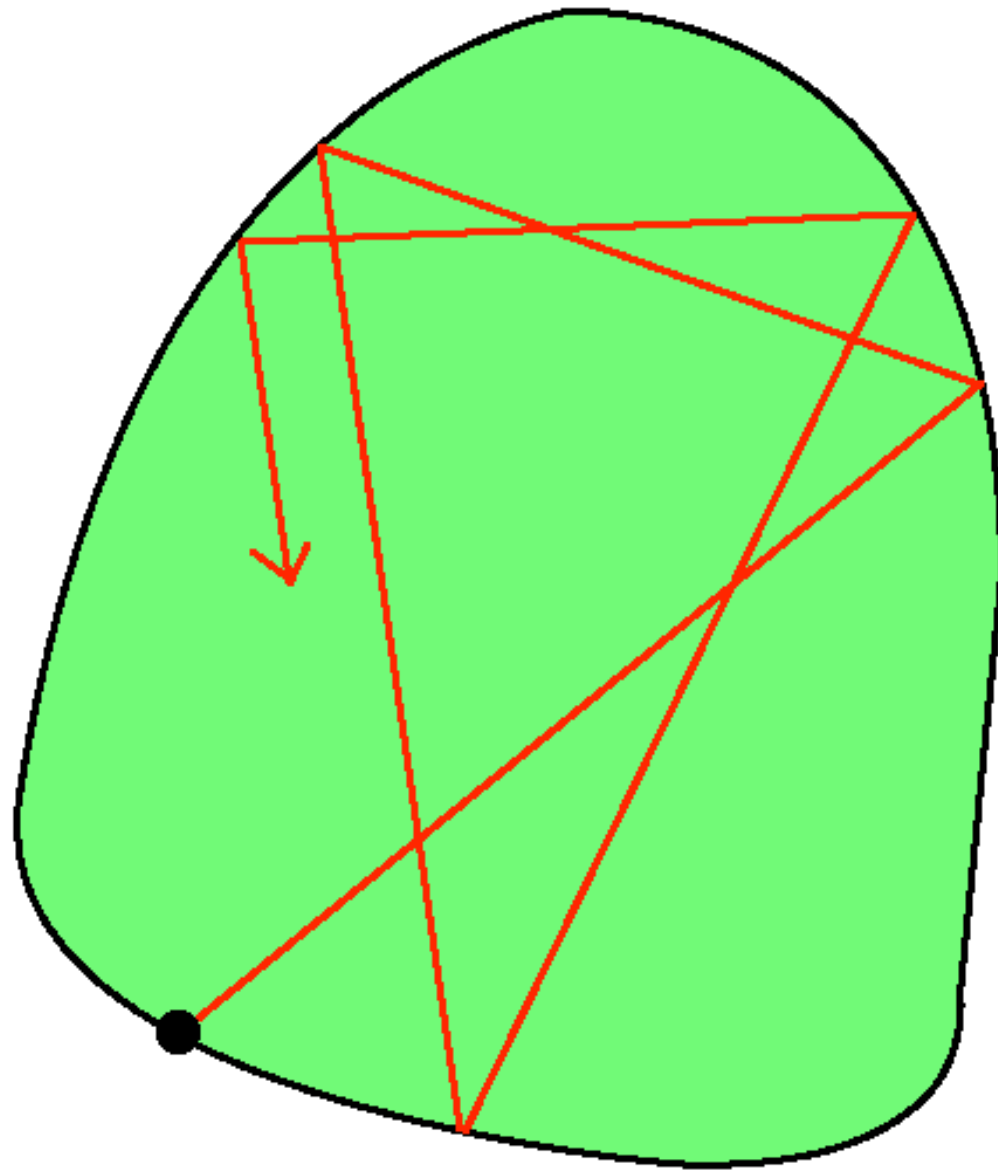
Caustique : ellipse

la trajectoire
passe par les
foyers

Caustique : hyperbole



Et pour un billard convexe choisi au hasard ?

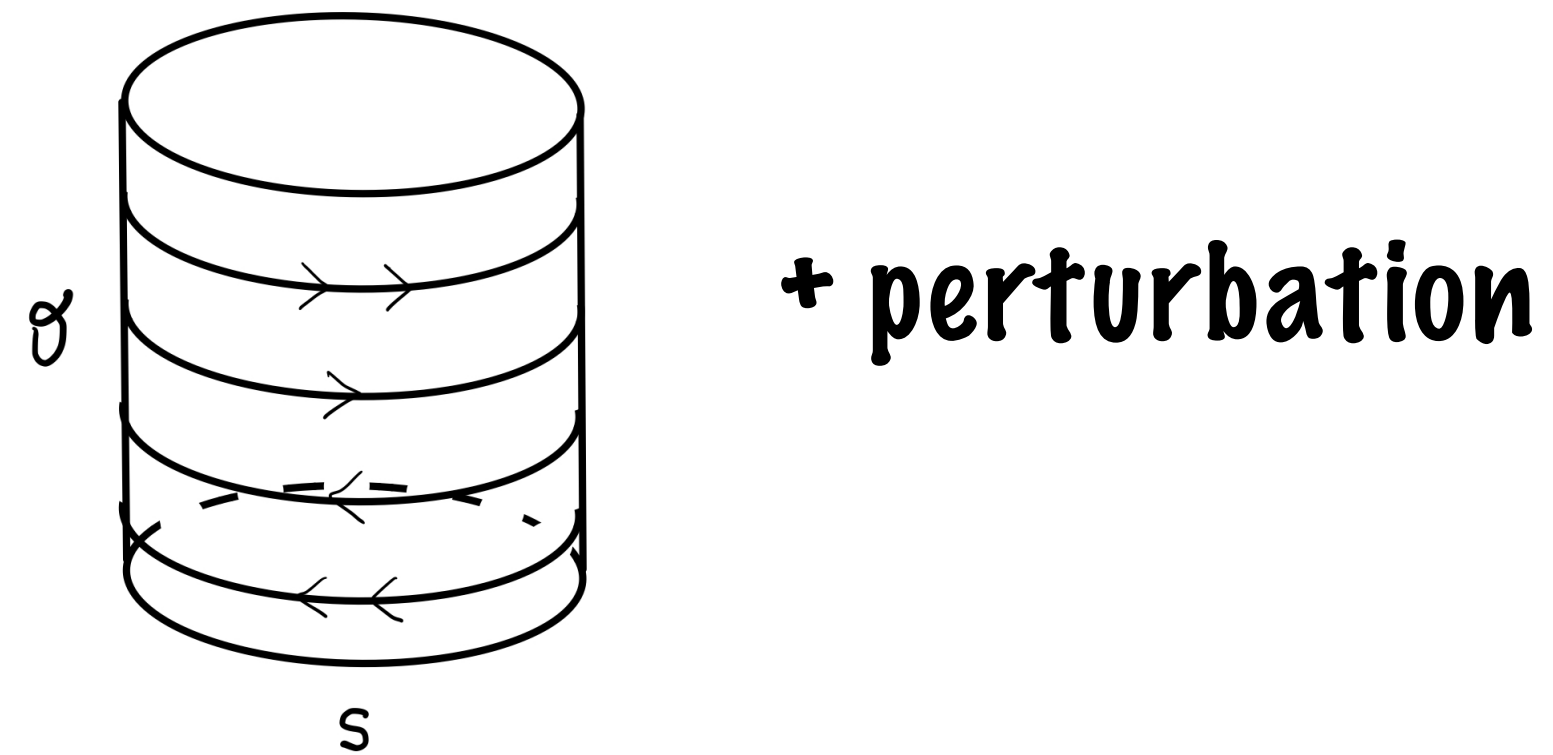


A-t-on toujours une “grande” partie de la table remplie par des caustiques ?

Théorème (Lazutkin '70) : Il existe un changement de coordonnées $(s, \theta) \xrightarrow{\psi} (x, \varphi)$
t.q. l'application billard devient

$$\tilde{f}(x, \varphi) = (x + \varphi + O(\varphi^3), \varphi + O(\varphi^4))$$

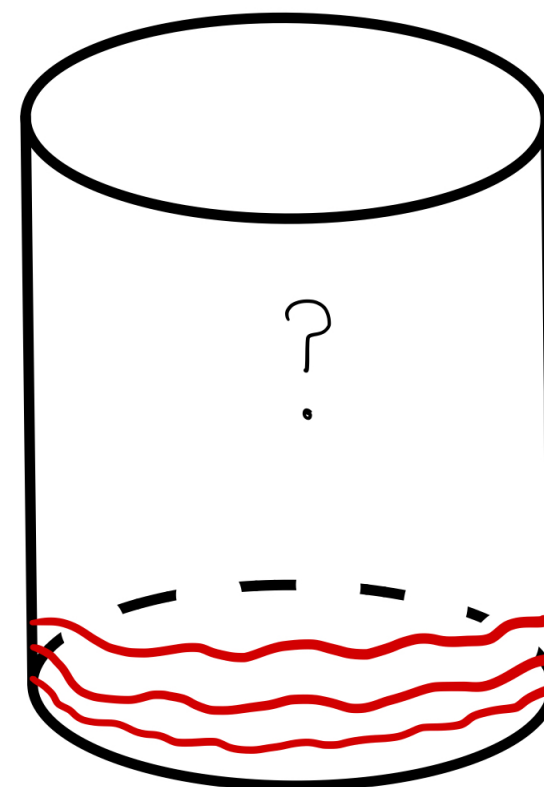
Lazutkin : proche du bord, l'application billard est une perturbation d'un système intégrable



Théorème KAM



Un « gros » ensemble (pas ouvert a priori) de caustiques un peu déformées survit !



Entre les caustiques qui survivent ?

Entre les caustiques qui survivent ?

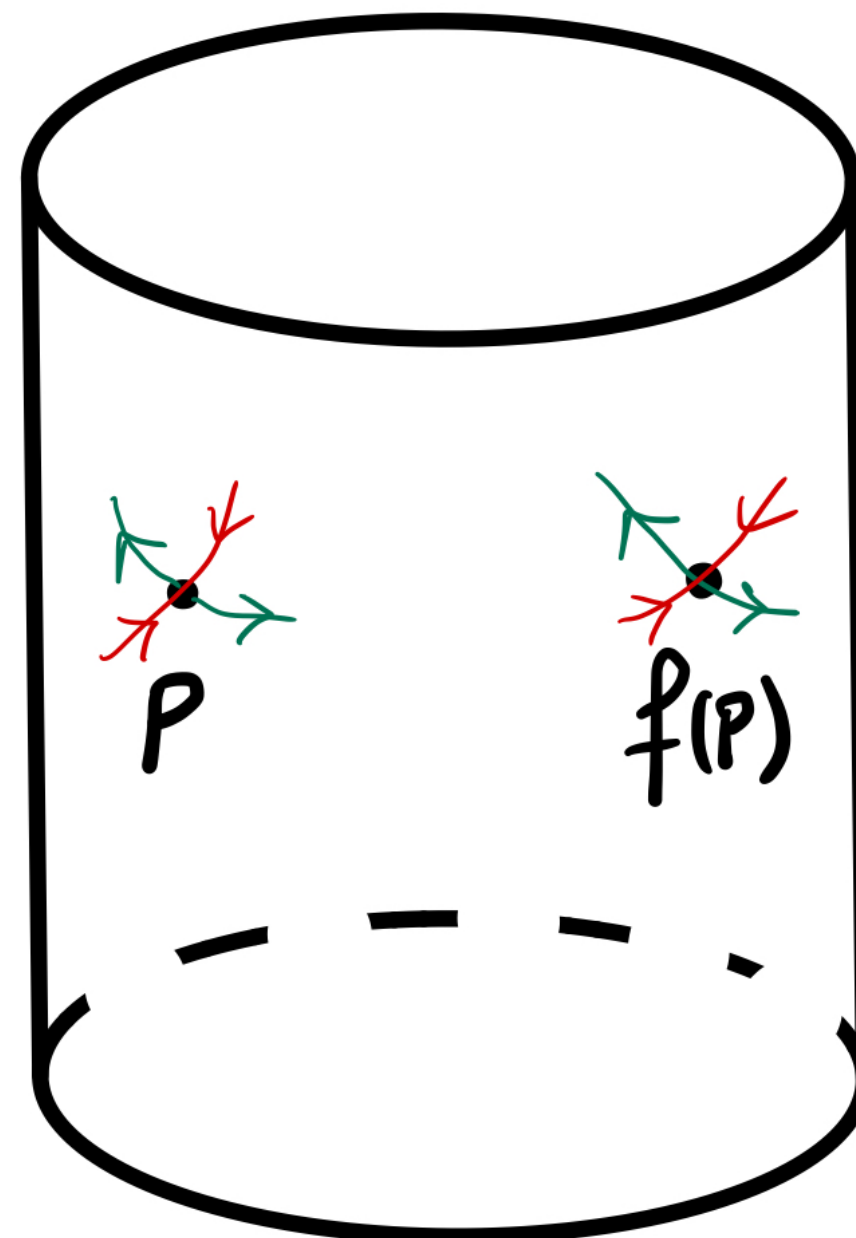
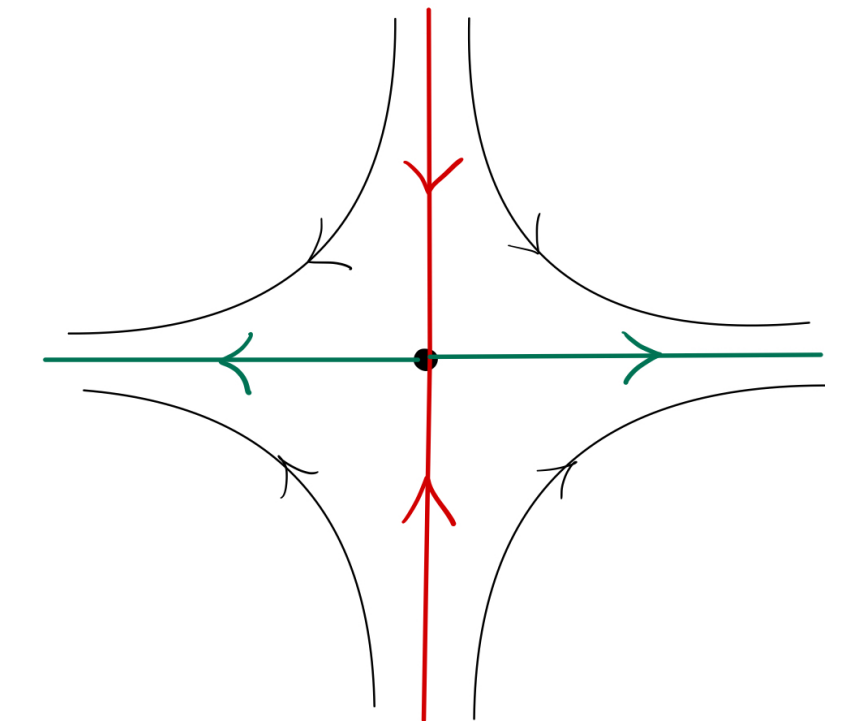
Pour un billard "typique" on va avoir des comportements chaotiques !

Point périodique hyperbolique

P

$$x \mapsto Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$



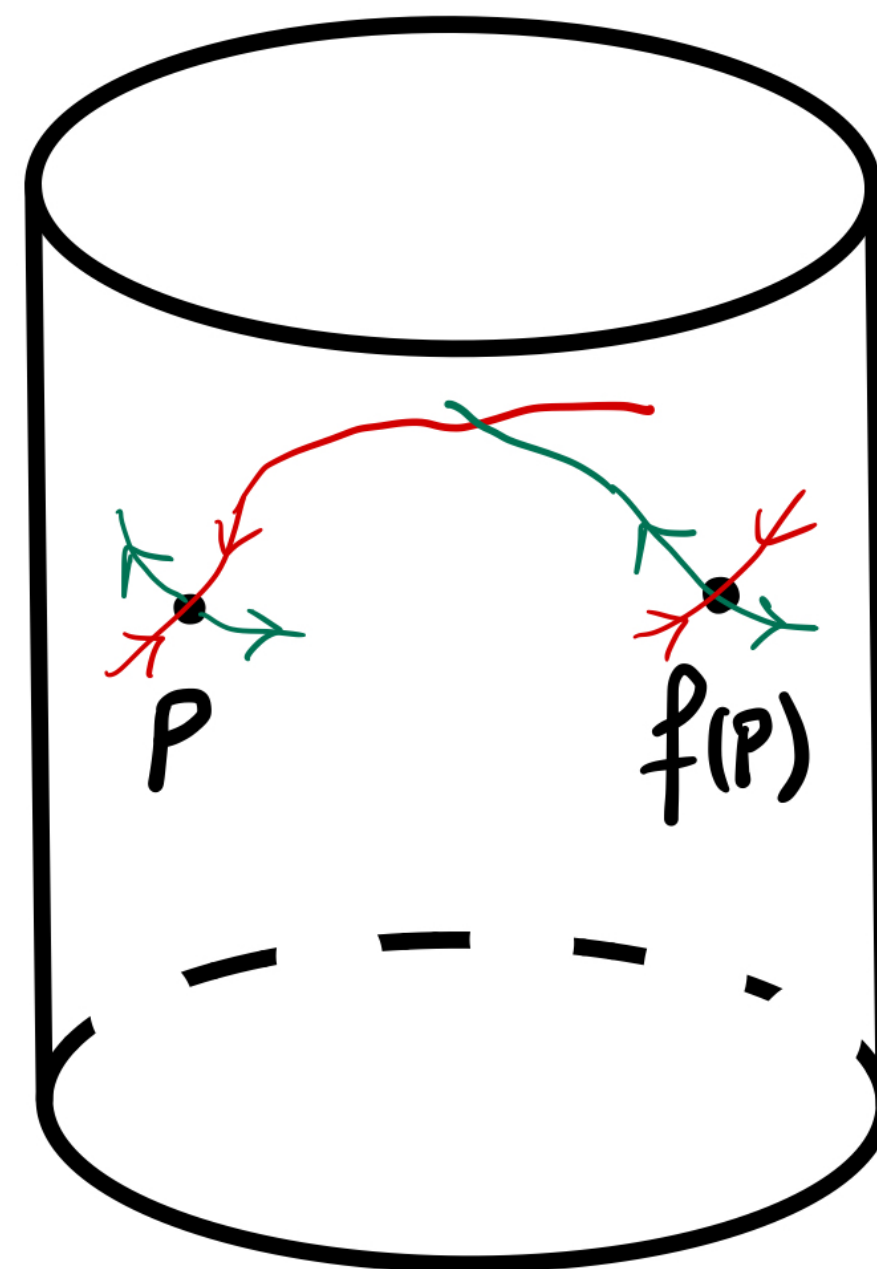
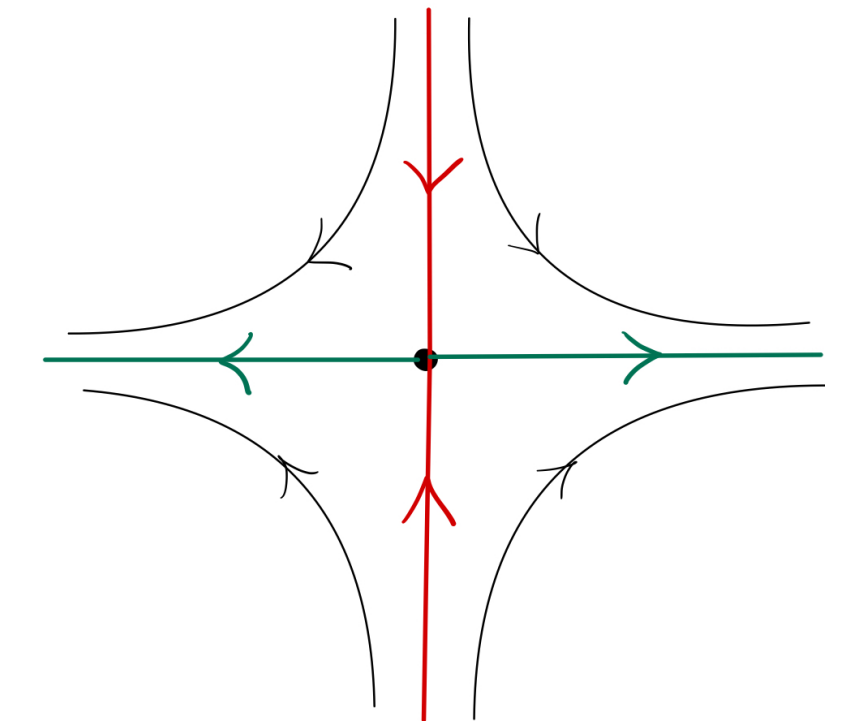
Entre les caustiques qui survivent ?

Pour un billard "typique" on va avoir des comportements chaotiques !

Point périodique hyperbolique P

$$x \mapsto Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$



Entre les caustiques qui survivent ?

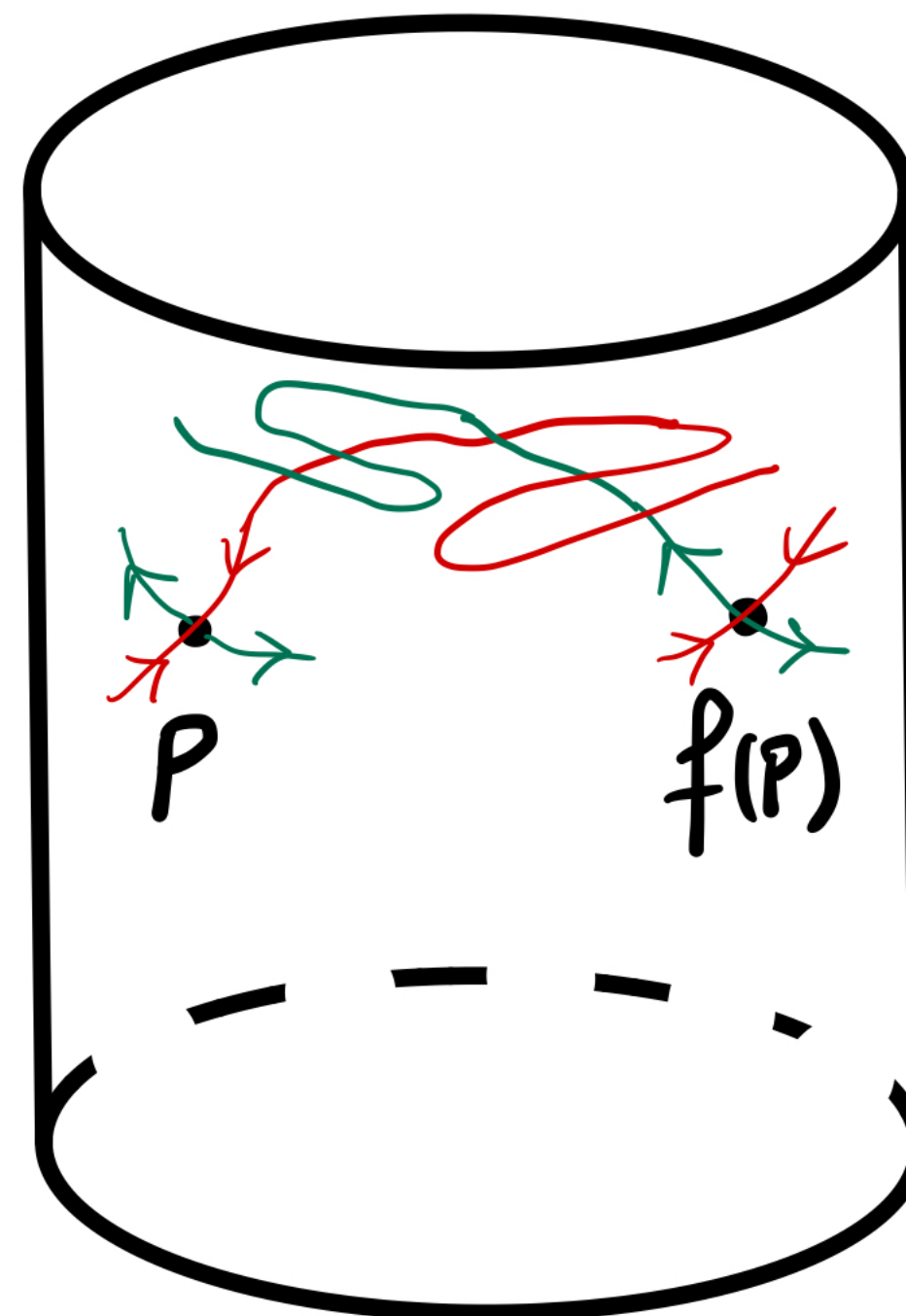
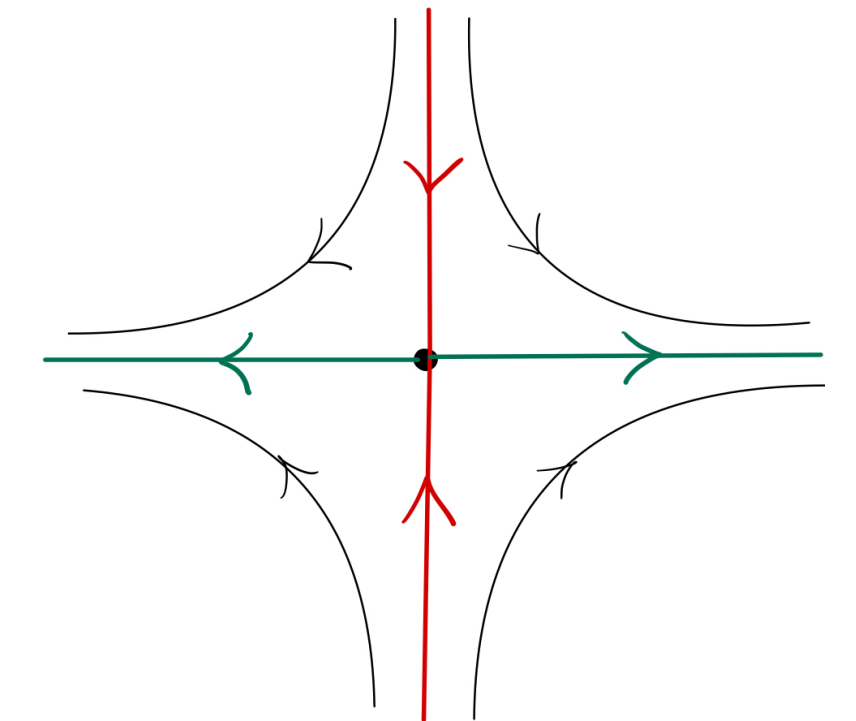
Pour un billard "typique" on va avoir des comportements chaotiques !

Point périodique hyperbolique

P

$$x \mapsto Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$



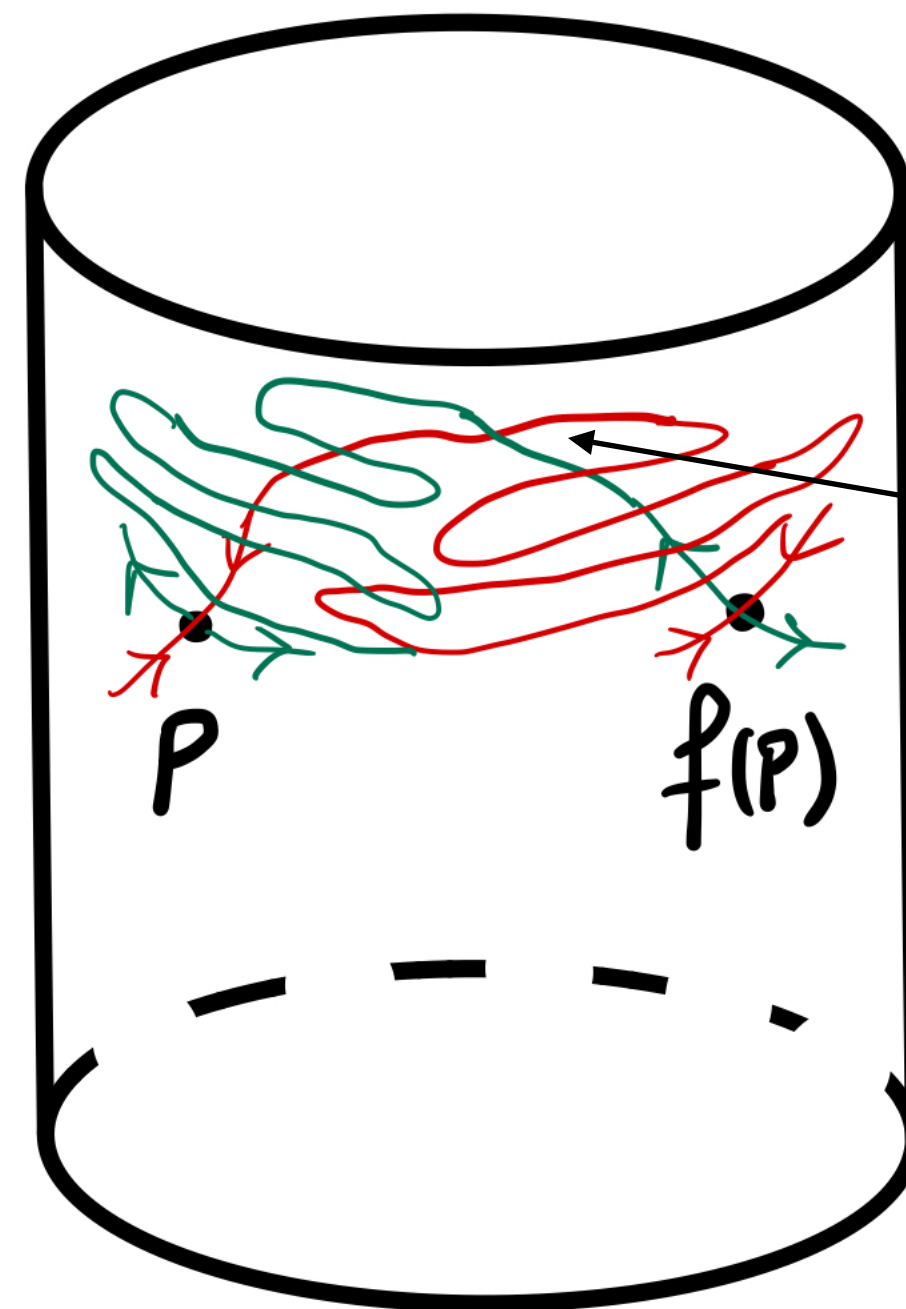
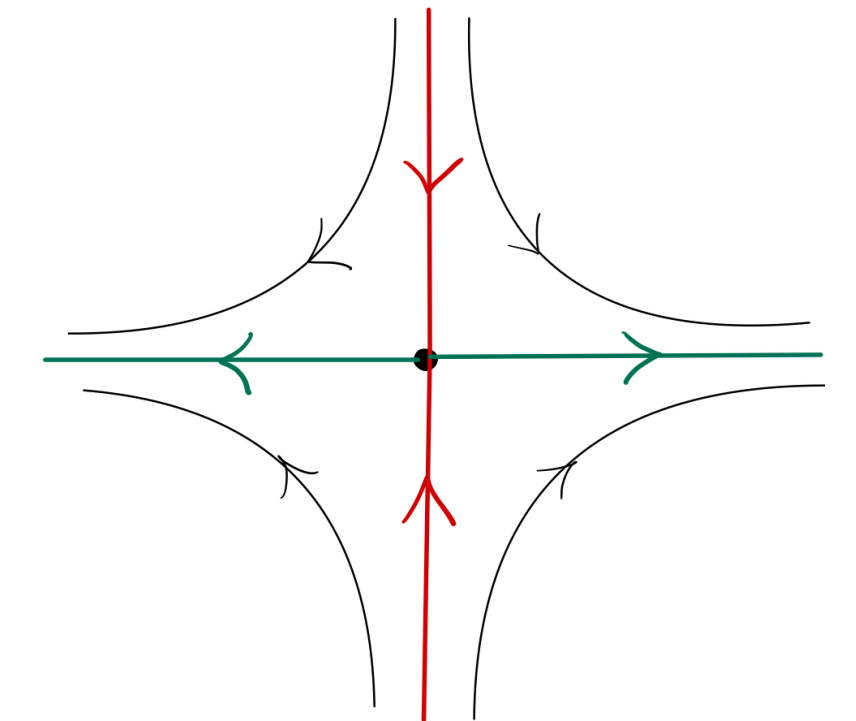
Entre les caustiques qui survivent ?

Pour un billard "typique" on va avoir des comportements chaotiques !

Point périodique hyperbolique P

$$x \mapsto Ax$$

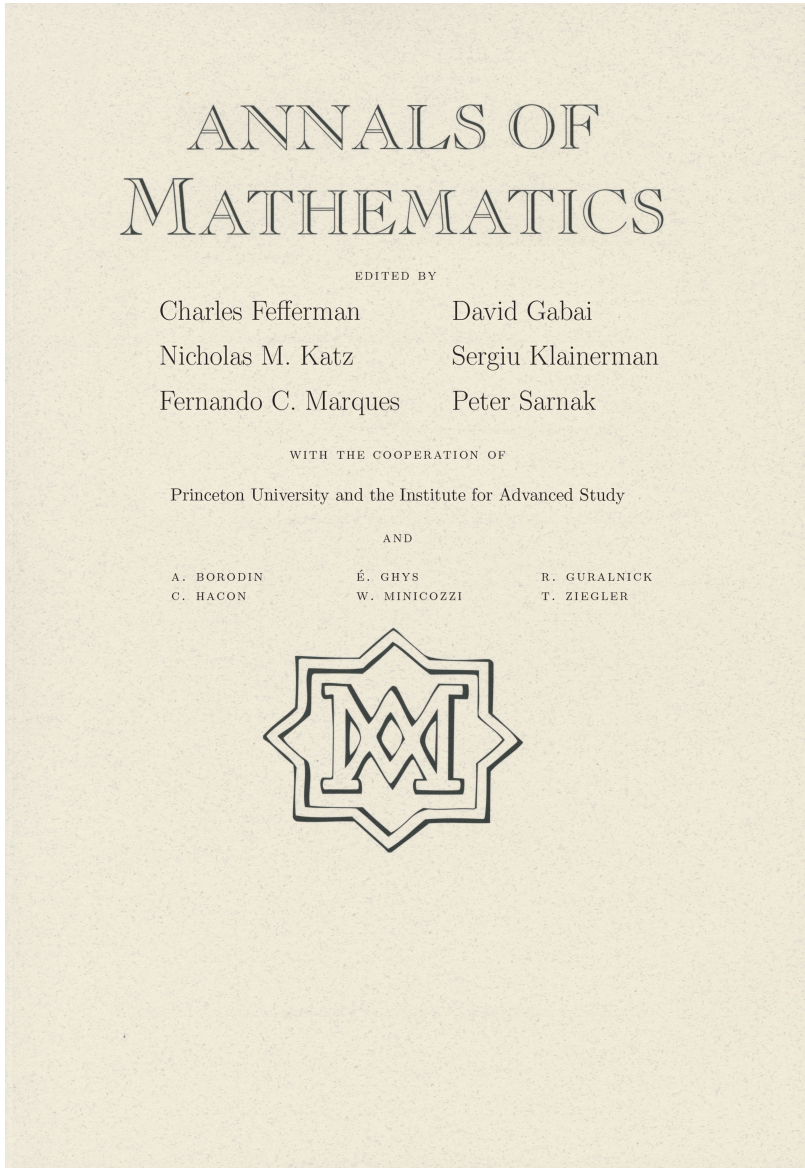
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$



Fer à cheval
(sensibilité aux données initiales)

Les billards elliptiques sont-ils les seuls billards ayant une région ouverte remplie de caustiques ?

Les billards elliptiques sont-ils les seuls billards ayant une région ouverte remplie de caustiques ?



Si vous savez y répondre, félicitations !
Vous avez résolu la conjecture de Birkhoff



Merci !